ВАРЬИРОВАНИЕ ФОРМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

КИСЕЛЬНИКОВ И.В.
Барнаульский государственный педагогический университет

При изучении начал математического анализа в средней школе наибольшие трудности учащиеся испытывают там, где требуется понимание таких фундаментальных понятий, как функция, непрерывность, предел. К основными ситуациям, реализация которых позволяет обеспечить достижение понимания в философии (В.М.Филатов, 1983) относят: 1) диалог, 2)перевод текста с одного языка на другой, 3)интерпретация. Применительно к началам математического анализа реализация второй ситуации является наиболее приемлемой по причине богатства выразительных возможностей, имеющихся для представления изучаемых в этой дисциплине фактов. Могут быть использованы 3 языка: графический, аналитический, словесный. Для каждого из понятий есть свои приоритетные формы выражения. Кроме того, учащиеся тоже имеют свои приоритеты в восприятии учебного материала. Одни легче воспринимают словесную информацию. Такие школьники обычно предпочитают формулировки, без особых трудностей овладевают терминологией понятий. Другие лучше воспринимают материал, преподносимый в виде картинок, схем, иллюстраций. Для третьих школьников наиболее приемлемой является знаково-символическая форма представления.

Опыт показывает, что продвижение в понимании учеником достигается легче, если он систематически будет находится в ситуации, требующей переходить от одного, желательно наиболее доступного, личностно-значимого языка описания факта к другим. Возможностей для создания подобных ситуаций в школьном курсе множество, но есть темы, при изучении которых это необходимо. Одна из таких тем — "Преобразования графиков функций". Ее усвоение позволяет не просто расширить класс функций, графики которых можно построить на основе известных, но и глубже осознать само понятие функции; сформировать ассоциации между аналитическими выражениями, задающими функции и их графиками, которые в дальнейшем "работают"при введении понятий математического анализа, решении уравнений, неравенств, "нестандартных"задач.

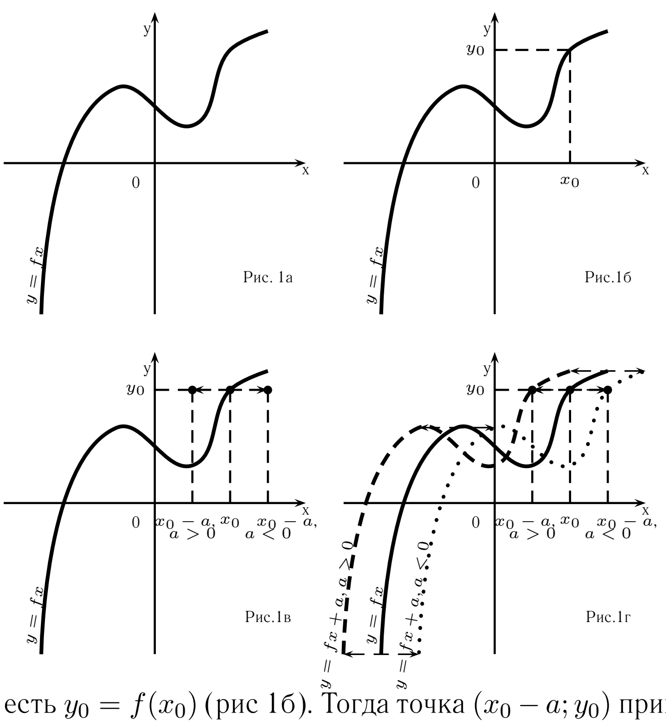


Рис. 1а Рис.1б Рис.1в Рис.1г

Продемонстрируем на примере темы "Преобразования графиков функций", как различные формы представления содержания могут быть задействованы в процессе обучения.

1. Использование различного с языковой точки зрения характера обоснований при введении преобразований, что иллюстрируют следующие примеры.

Пример 1.

Задача построения графика функции $y = f(x+a)$ на основе графика функции $y = f(x)$ может быть решена следующим образом.

Пусть $y = f(x)$ — произвольная функция, график которой изображен на рис. 1а. Проведем рассуждения, опираясь на график. Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то есть $y_0 = f(x_0)$ (рис 1б). Тогда точка $(x_0 - a; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x+a)$ (рис 1в). Действительно, $f((x_0 - a) + a) = f(x_0) = y_0$. Обратно, если точка $(x_0 - a; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x+a)$, то точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Таким образом, любую точку графика функции $y = f(x+a)$ можно получить сдвигом каждой точки $(x_0; y_0)$, принадлежащей графику функции $y = f(x)$ в точку $(x_0 - a; y_0)$, то есть сдвигом на $|a|$ единиц влево, если

$a > 0$ и сдвигом на $|a|$ единиц вправо, если $a < 0$ (рис 1г). Рассуждения в данном случае ведутся на графическом языке.

Пример 2.

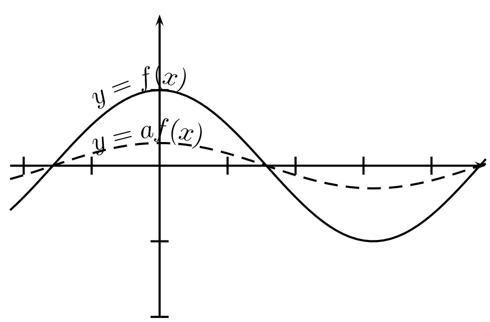
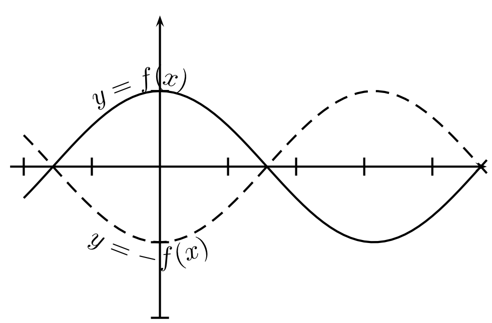
Рассмотрим рассуждения на знаково-символическом языке при изложении решения задачи построения графика функции $y = f(x) + a$, если задан график функции $y = f(x)$.

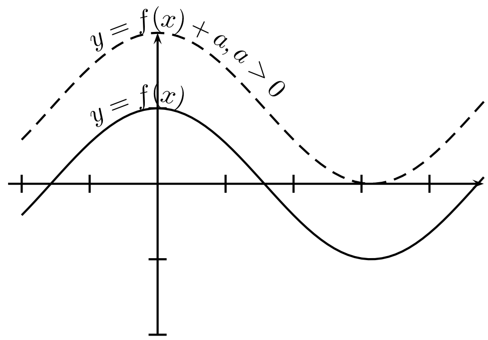
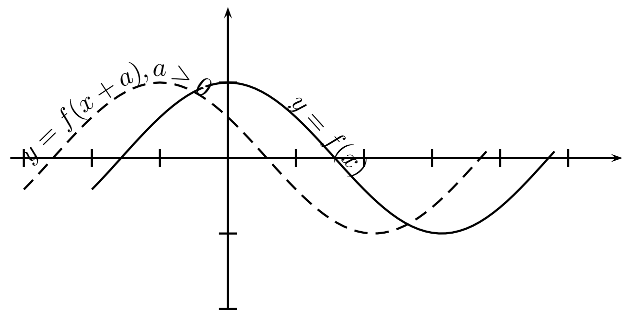
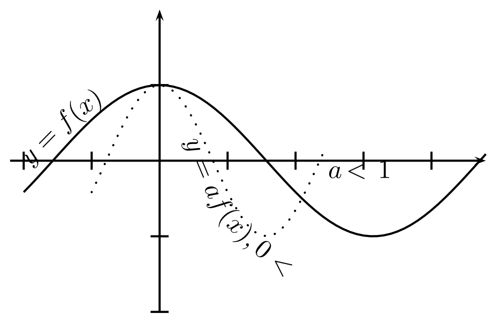
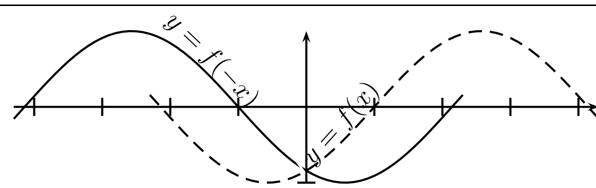
Рассуждения ведутся без опоры на график. Пусть функция $y = f(x)$ принимает в точке x_0 значение y_0, то есть $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $y = f(x)+a$ в точке x_0 принимает значение y_0+a, так как $f(x_0)+a = y_0 + a$. Обратно, если в точке x_0 функция $y = f(x) + a$ принимает значение , то функция $y = f(x)$ в точке x_0 принимает значение y_0. Таким образом, любое значение функции $y = f(x) + a$, отвечающее значению x_0 аргумента, если известно значение y_0 функции $y = f(x)$ в точке x_0, можно получить, прибавляя к этому значению число a, получая y_0+a. Этот результат графически иллюстрирует рисунок, приведенный в третьей строке таблицы 1.

Заметим, что речь идет не о различных способах решения, а лишь о различных способах выражения решения. Учитель может при введении первого преобразования вести рассуждения, привлекая оба языка, а в дальнейшем намеренно, ограничивась лишь одним. После этого полезны задания для учащихся типа "осуществить решение задачи примера 1, не опираясь на график функции", при выполнении которых требуется изложить полученное решение на другом языке.

Идеальным результатом изучения рассматриваемой темы является умение выражать сущность каждого преобразования на трех языках. Представим этот результат в виде таблицы (Таблица 1), в которой сущность преобразований выражена в знаково-символической, словесной и графической формах. Ее целесообразно предложить не в готовом виде, а организовать на уроке деятельность по заполнению. Эта таблица может использоваться в качестве опорного сигнала при решении задач на выполнение преобразований. В дальнейшем она может быть дополнена сведениями о построении графиков функций $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$ на основе графика функции f.

Таблица 1.

N	Знаково-символическая форма	Словесная форма	Графическая форма
1	Из графика $y = f(x)$ в график $y = af(x)$	При $a > 1$ график функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в a раз вдоль оси ординат, а при $0 < a < 1$ − сжатием вдоль оси ординат в $\frac{1}{a}$ раз	
2	Из графика $y = f(x)$ в график $y = -f(x)$	График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси абсцисс	

3	Из графика $y = f(x)$ в график $y = f(x) + a$	График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси ординат на $\|a\|$ единиц. Направление сдвига определяется знаком числа a (при $a > 0$ – сдвиг вверх, а при $a < 0$ – вниз)	
4	Из графика $y = f(x)$ в график $y = f(x + a)$	График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси абсцисс на $\|a\|$ единиц. Направление сдвига определяется знаком числа a (при $a > 0$ – сдвиг влево, а при $a < 0$ – вправо)	
5	Из графика $y = f(x)$ в график $y = f(\mathrm{a}x)$	При $a > 1$ график функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в a раз вдоль оси абсцисс, а при $0 < a < 1$ – сжатием вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{a}$ раз	
6	Из графика $y = f(x)$ в график $y = f(-x)$	График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси ординат	

2. Применение в процессе обучения задач на перевод содержания с одного языка на другой. Приведем примеры таких задач,типизированных по виду используемой формы представления данных (словесная – тип С, графическая – тип Г, знаково-символическая – тип З).

Тип С

1. График некоторой функции $y = f(x)$ представляет собой прямую линию, проходящую через точки $(-1; 0)$ и $(0; 3)$. Его сдвинули вдоль оси абсцисс в положительном ее направлении на 3 единицы, растянули вдоль оси абсцисс в 2 раза, зеркально отразили относительно оси ординат. Нарисуйте график получившейся в результате преобразования функции и задайте ее аналитически.

2. Графиком некоторой функции является прямая, наклоненная под углом $30°$, пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; 5)$. Ее зеркально отразили относительно оси ординат, сдвинули на 2 единицы в противоположном положительному направлении оси ординат. Нарисуйте график получившейся в результате преобразования функции и задайте ее аналитически.

3. Графиком некоторой функции является парабола, проходящая через точки $(-1;0)$, $(2;-3)$, $(1;-4)$. Нарисуйте график и задайте формулой функцию, которая получится в результате последовательного выполнения следующих преобразований: сдвиг вдоль оси Oy на 3 единицы вверх, растяжение вдоль оси Oy в 2 раза, зеркальное отражение относительно оси абсцисс.

Тип З

1. Опишите преобразования, которым подвергался график функции $y = 2x - 5$, если в результате этих преобразований последовательно получались графики функций $y = 5-2x$, $y = 5-x$, $y = -x+1$. Проиллюстрируйте выполняемые преобразования графически.

2. Опишите преобразования, которым подвергался график функции $y = x^2$, если в результате этих преобразований последовательно получались графики функций $y = (x+3)^2$, $y = (x+3)^2 - 1$, $y = x^2 + 3x + 10$. Проиллюстрируйте выполняемые преобразования графически.

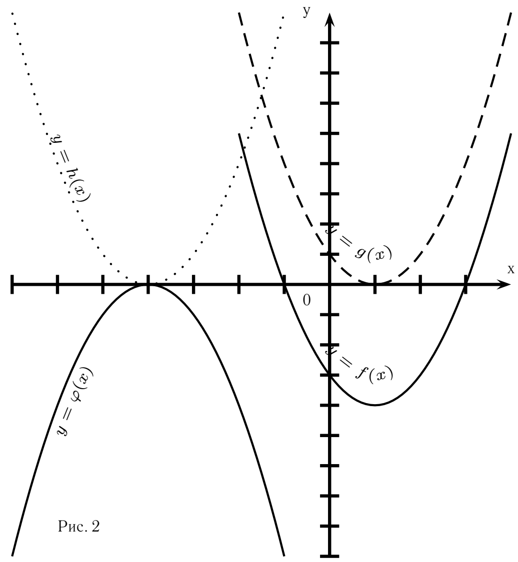


Рис. 2

Тип Г

1. Опишите словесно, каким преобразованиям подвергался график функции $y = f(x)$, если из него последовательно получались графики функций $y = g(x)$, $y = h(x)$, $y = \varphi(x)$ (Рис. 2).

2. Придумайте выражение $\varphi(x)$, задающее квадратичную функцию $y = \varphi(x)$, график которой изображен на рис.2. И задайте аналитически квадратичные функции $y = h(x)$, $y = g(x)$, $y = f(x)$, графики которых также изображены на рис. 2, если известно, что каждый последующий график получен из предыдущего либо параллельным переносом, либо зеркальным отражением.

Основываясь на приведенных примерах, учитель может составить наборы задач разного уровня сложности. Увеличение уровня сложности достигается за счет наращивания числа выполняемых преобразований, использования не конкретных числовых данных, а параметров.

Список литературы

1. Брейтигам Э.К., Кисельников И.В. Различные формы представления основных понятий математического анализа в средней школе. Барнаул, 1996.- 55 с.

2. Лященко Е.И. К проблеме понимания в обучении математике/Проблемы и перспективы развития методики обучения математике. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 1999. С. 18-21.

3. Сатьянов П.Г. Задачи графического содержания при обучении алгебре и началам математического анализа// Математика в школе, 1987, N 1, с. 56.