ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

ШАПИРО И.М.
Барнаульский государственный педагогический университет

Тригонометрические неравенства - одна из традиционно трудных тем школьного курса математики. Как показывает опыт, большая часть учеников выпускных классов так и не приобретает умения решать подобные неравенства. Длительное исследование возможностей обеспечить овладение учащимися такого умения привело нас к следующим принципиальным выводам:

1) изучение темы должно осуществляться разноуровнево;

2) успешности обучения способствует продуманная подготовительная работа. Независимо от уровня обучения математике изложение темы целесообразно вести по плану:

а) "чтение"единичной окружности;

б) решение простейших тригонометрических неравенств;

в) решение некоторых видов тригонометрических неравенств.

Дифференциация обучения осуществляется при реализации последних двух пунктов плана, особенно последнего.

а) Независимо от уровня обучения подготовительная работа включает повторение свойств тригонометрических функций и методов решения тригонометрических уравнений, овладение умением "читать"единичную окружность.

Обучение "чтению"единичной окружности уместно осуществлять многошагово.

На первом шаге естественно отработать чтение "крайних"точек единичной окружности (рис. 1).

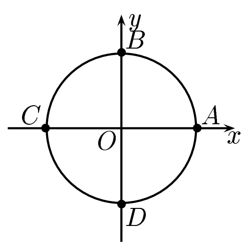

Рис. 1:

OA $= 1$. Так точка A соответствует множеству углов вида $2\pi n$, где $n \in Z$, т.е. углам 0, 2π, 4π, -2π, -4π и т.д. Точка B соответствует множеству углов вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$, т.е. углам$-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ и т.д.

Точка C соответствует множеству углов вида $\pi + 2\pi m$, где $m \in Z$, в частности, углам -5π, -3π, $-\pi$, π, 3π, 5π... Точка D соответствует множеству углов вида $\frac{3\pi}{2} + 2\pi\ell$,где $\ell \in Z$, в частности, углам $-\frac{9\pi}{2}$, -$\frac{5\pi}{2}$, -$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{2}$.

На втором шаге отрабатывается "чтение"любых точек единичной окружности (рис.2).

Пусть, например, $\angle EOA = \frac{\pi}{6}$, тогда точка E соответствует множеству углов $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$, в частности,углам -$\frac{23\pi}{6}$, -$\frac{11\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{25\pi}{6}$. Если $\angle AOF = \frac{4\pi}{5}$, то точка F соответствует множеству углов $\frac{4\pi}{5} + 2\pi k, k \in Z$, и, в частности, углам $\frac{24\pi}{5}$, $\frac{14\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, -$\frac{6\pi}{5}$, $-\frac{16\pi}{5}$.

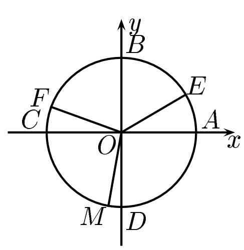

Рис. 2:

Если $\angle AOM = \frac{19\pi}{14}$, то точка M соответствует множеству углов $\frac{19\pi}{14} + 2\pi m$, где $m \in Z$ и, в частности, углам -$\frac{37\pi}{14}$, $-\frac{9\pi}{14}$, $\frac{19\pi}{4}$, $\frac{47\pi}{14}$. Наконец, на третьем шаге существенно отработать чтение дуг единичной окружности (рис.3).

Пусть $\angle AOM = \frac{\pi}{7}$, а $\angle AOL = \frac{3\pi}{8}$. Тогда дуге LmM соответствует множество углов ($\frac{\pi}{7} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{8} + 2\pi n$), где $n \in Z$, в частности, дуги($\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{8}$), ($\frac{15\pi}{7}$, $\frac{19\pi}{8}$), (-$\frac{13\pi}{7}$, $-\frac{13\pi}{8}$). Выполнение серии подобных упражнений позволяет ученикам "овладеть"единичной окружностью и обеспечивает подготовку, необходимую для перехода к решению простейших тригонометрических неравенств.

б) Обучение решению простейших тригонометрических неравенств занимает ключевое место в изложении темы независимо от уровня обучения математике.

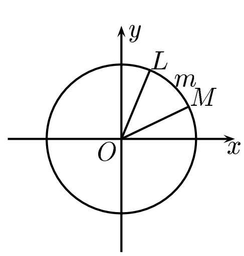

Рис. 3:

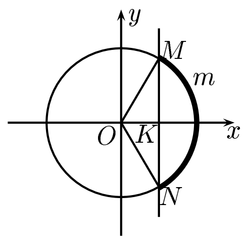

Рис. 4:

Для решения простейших тригонометрических неравенств целесообразно использовать единичную окружность.

Первоначально естественно рассматривать неравенства $\cos x > a$, $\cos x < b$, $\sin x > c$, $\sin x < d$ (1) при условии, что a, b, c, d принадлежат области значений указанных функций.Пусть надо решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

Разобъем радиус OA на две равные части и через точку деления K проведем прямую, параллельную ОУ. Эта прямая пересечет единичную окружность в точках М и N (рис. 4) Неравенству удовлетворяют все значения х, принадлежащие дуге NmM,т.е. все $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}.)$. Учитывая периодичность косинуса, заключаем, что решениями исходного неравенства являются все значения переменной х, принадлежащие промежутку $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $\frac{\pi}{3} + 2\pi n)$, где $n \in Z$.

Особое значение приобретает решение неравенств (1) при условии, что числа a, b, c, d области значений синуса и косинуса не принадлежат. В таких случаях ученики, используя неумело аналогию с соответствующими тригонометрическими уравнениями, нередко приходят к ошибочным выводам.

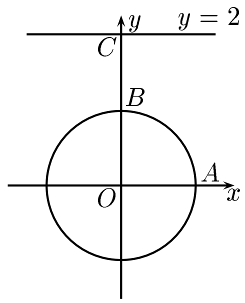

Рис. 5:

Рассмотрим неравенство $\sin x < 2$. $OA = 1$. Построим прямую у $= 2$. Она окружность не пересекает, так как число 2 области значений функции $\sin x$ не принадлежит: как известно множество значений синуса - отрезок [-1;1]. Но этот отрезок полностью принадлежит промежутку $(-\infty; 2)$. Таким образом, исходному неравенству удовлетворяет множество действительных чисел.

Представляет несомненный интерес решение неравенств вида:
$\sin x \geq a$, $\sin x \leq b$, $\cos x \geq c$, $\cos x \leq d$ (2).

Рассмотрим неравенство $\cos x \geq 1$. Это неравенство равносильно совокупности неравенства $\cos x > 1$ и уравнения $\cos x = 1$. Неравенство $\cos > 1$ решений не имеет .Решениями уравнения неравенства $\cos x = 1$ является множество чисел вида $2\pi k$, где $k \in Z$.

Некоторую трудность для учащихся представляет решение неравенств вида
$\operatorname{tg} x >, tgx < b.$(3)

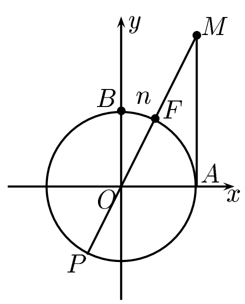

Рис. 6:

Приведем пример решения неравенства такого вида: $\operatorname{tg} x > 2$.
$AO = 1$. Построим линию тангенсов и отложим на ней отрезок $AM = 2$. Проведем прямую MP, проходящую через центр окружности. Множеству чисел $(2; \infty)$ удовлетворяют все точки дуги FnB,а, следовательно, неравенству $\operatorname{tg} x > 2$ удовлетворяют все значения х $\in (\operatorname{arctg} 2, \frac{\pi}{2})$.Учитывая периодичность тангенса, придем к выводу, что решениями неравенства $\operatorname{tg} x > 2$ являются все числа $x \in (\operatorname{arctg} 2 + Zm, \frac{\pi}{2} + \pi m)$, $m \in Z$.

В классах с углубленным изучением математики целесообразно предлагать ученикам решать отдельные простейшие тригонометрические неравенства с параметрами, в частности, таких как "При каких значениях a имеет решение неравенство

1) $\cos x < a - 1$,
2) $\sin x > 4 - a$,
3) $\operatorname{tg} x \leq 3a - 1$

в) Классификация тригонометрических неравенств по видам и методам решения может быть приведена аналогично классификации соответствующих тригонометрических уравнений.

Считаем возможным на базовом уровне обучения математике ограничиться рассмотрением отдельных неравенств видов
$\sin f(x) > a$, $\sin f(x) < a$,
$f(\cos x) > 0$, $f(\cos x) < 0$.

В классах с углубленным изучением математики естественно предлагать школьникам неравенства и других видов $a \sin x + d \cos x > c$, $a \sin x + b \cos x < c$, $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + cos^2 x \geq d$ $(d > 0, d < 0)$, а также ориентированные на специфические методы решения (метод подстановки, метод оценки и др.)

Решение тригонометрических неравенств, как правило, сводится (используя соответствующую подстановку) к решению алгебраических неравенств, а решение последних (используя эту же подстановку) - к решению простейших тригонометрических неравенств.

Рассмотрим неравенство $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 < 0$. Обозначив $\sin x = t$ и учитывая, что $-1 \le \sin x \le 1$, сведем решение неравенства к решению системы алгебраических неравенств

$$\begin{cases} 2t^2 - 3t - 2 < 0, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Решением неравенства $2t^2 - 3t - 2 < 0$, является множество значений t, удовлетворяющих условию $-\frac{1}{2} < t < 2$.

Таким образом, система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < t < 2, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases} \qquad (5)$$

которая в свою очередь равносильна неравенству: $-\frac{1}{2} < t \le 1$.

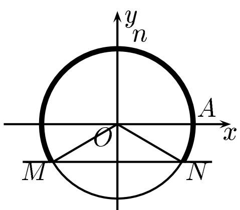

Рис. 7:

Используя подстановку $\sin x = t$, придем к неравенству $-\frac{1}{2} < \sin x \le 1$. Неравенству (6) удовлетворяют все значения переменной x, принадлежащие дуге NmM (рис. 7).

Таким образом, решением неравенства $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 < 0$ служит множество значений переменной x, принадлежащие промежутку $(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n)$, где $n \in Z$.

Следует заметить, что число $\frac{7\pi}{6}$ принадлежат этому промежутку, но так как n - любое целое число (в том числе и бесконечно большое по модулю) заменить промежуток отрезком не следует.

В качестве упражнений может быть предложена в числе других следующая серия задач.

1. Решите неравенства:

а) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\sin x < -\frac{1}{2}$;
в) $\operatorname{tg} x > 1$;
г) $\cos x < 0$;
д) $\cos x > 0$;
е) $\operatorname{tg} x < 0$;
ж) $\operatorname{tg} x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$;
з) $\cos x \ge -\frac{1}{2}$;
и) $\sin x \ge 0$;
к) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$;
л) $\sin x \ge -2$;
м) $\cos x < 5$;
н) $\operatorname{tg} x \ge 0$;
о) $\sin x \le -1$;
п) $\cos x \ge 1$.

2. Решите неравенства:
а) $\cos 5x < 0$;
б) $\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{12}) > 0$;
в) $2\sin(\frac{\pi}{4} - x) + \sqrt{3} < 0$;
г) $\cos(\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} > 0$;
д) $\sin(4x + 3) + \frac{1}{3} \ge 0$;
е) $\operatorname{tg}(\frac{2x}{3} - 1) \le 7$.

3. Найдите все решения неравенств:
а) $\sin\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\sin x \ge -\frac{1}{2}$;
б) $\cos\frac{\pi}{5}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x \ge -\frac{1}{2}$;
в) $\sin 3x \cos 3x < \frac{1}{6}$;
г) $\sin^2 2x - \cos^2 2x \le 0$;
д) $\frac{\sin x}{1+\cos x} \ge -1$;
е) $2\cos^2 7x - 1 > \frac{1}{3}$.

4. Найдите все решения неравенства,
а) $\sin^2 x \le 0,5$, удовлетворяющие условию $x \in [-\pi; \pi]$;
б) $1 - 2\sin^2 4x \ge 0$, удовлетворяющие условию $x \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$;

5. Найдите все решения неравенств
а) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 < 0$;
б) $2\sin x \operatorname{ctg} x + 1 \le \cos x$;

в) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x > 4$;
г) $(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 > \sin x$;
д) $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}\cos x$.

6. Решите неравенства
а) $\sin x + \cos x > 1 + \sin 2x$;
б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$;
в) $\sin(2x-1) < \cos(2x-1)$;
г) $\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4} - x) \leq -\sqrt{2}$;
д) $2\sin x \sin 2x + \cos 3x \leq 0$;
е) $\cos\cos 3x > \cos 5x \cos 7x$;
ж) $\sin x \geq \operatorname{ctg} x$.

7. Решите неравенства
а) $\sin 4x > \sin 6x$;
б) $\cos^2 x - \cos^2 4x < 0$;
в) $\cos^2 x - \sin^2 2x \geq 0$;
г) $\cos 3x - \cos 2x \leq 0$.

8. Решите неравенства
а) $2\cos x(\cos x - 2\sqrt{2}\operatorname{tg} x) < 5$;
б) $\sin^3 x \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) + \cos^3 x \cos(\frac{\pi}{2} - 3x) > \frac{3\sqrt{3}}{8}$;
в) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$;
г) $|3 - 4\cos^2 x| \leq 1 + \operatorname{tg}^2 x$;
д) $|3 - 4\sin^2 x| \leq 1 + \operatorname{ctg}^2 x$;
е) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$;
ж) $\sin(2x + \frac{\pi}{18}) + \sin(x + \frac{\pi}{18}) - \sin x < 0$;
з) $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

Примечание. Неравенства 6, 7 целесообразно предложить ученикам, изучающим математику на повышенном уровне, неравенства *8 - учащимся классов с углубленным изучением математики.