Методология и технология профессионального образования

УДК 373.5.016:51 DOI 10.37386/2413-4481-2025-4-37-41

Татьяна Ивановна Варкентина
Алтайский краевой педагогический лицей-интернат, г. Барнаул, Россия, tvarkentina@yandex.ru
Оксана Анатольевна Тыщенко
Алтайский государственный педагогический университет, г. Барнаул, Россия, ttoksana@yandex.ru

ТЕНЕВЫЕ ПОНЯТИЯ КАК ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ — ЭЛЕМЕНТ ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ

Аннотация. В статье рассмотрены скрытые элементы содержания обучения математике в школе, названные теневыми. Отдельные из них — отражение предмета соответствующей научной области — обеспечивают научность изложения материала, другие — более локальные — могут преследовать методические цели. Приведены примеры теневого содержания, выявление и изучение которого способствуют увеличению систематизированности курса. Оценка методической целесообразности выявления и реализации в обучении теневых элементов содержания — актуальное профессиональное умение учителя.
Ключевые слова: теневые понятия; теневые элементы содержания; содержание обучения; содержательно-методическая линия; резервы общеобразовательного курса; алгебраические структуры; кольцо целых чисел; кольцо многочленов; метод выделения полного квадрата; логическая составляющая.

Tatiana I. Varkentina
Altai Regional Pedagogical Boarding Lyceum, Barnaul, Russia, tvarkentina@yandex.ru
Oksana A. Tyshchenko
Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia, ttoksana@yandex.ru

SHADOW CONCEPTS AS A THEORETICAL BASIS FOR THE CONTENT OF SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION: AN ELEMENT OF SUBJECT-METHODICAL TEACHER TRAINING

Abstract. The article examines the hidden elements of the content of school mathematics education, referred to as shadow concepts. Some of these elements reflect the subject matter of the corresponding scientific domain and ensure the scientific rigor of the material, while others – more localized – pursue methodological goals. The article provides examples of shadow content, the identification and explicit study of which enhance the systematization of the mathematics curriculum. Assessing the methodological expediency of identifying and implementing shadow content elements in teaching is an essential professional skill for teachers.
Keywords: shadow concepts; shadow content elements; learning content; content-methodological line; reserves of the general education curriculum; algebraic structures; ring of integers; ring of polynomials; method of allocating a full square; logical component.

При сохранении определенной инвариантной части содержание обучения математике в школе почти непрерывно изменяется. Это произошло, в частности, в связи с принятием новой концепции развития математического образования [1; 2]. Изменения происходят как на уровне проектирования программ, так и на уровне реализации их в учебниках. За последнее время введена содержательно-методическая линия «Вероятность и статистика», которая не так давно выделилась в отдельный учебный предмет, значительно расширен спектр вопросов алгебры и начал анализа, усиливших прикладную направленность курса. Как правило, содержание меняется за счет включения в курс дополнительного учебного материала.

Вместе с тем при совершенствовании содержания обучения математике можно рассматривать и другую тактику. Традиционный курс школьной математики, то самое стабильное инвариантное содержание, включая скрытые в обучении элементы, фактически обладает внутренними резервами для совершенствования.

Для скрытых элементов содержания использован термин «теневые понятия» [3; 4] и более общий термин «теневые элементы содержания» как элементы, обладающие скрытой в обучении частью, выявление которой может быть методически целесообразным.

Логическая составляющая курса школьной математики относится к теневому материалу. Говоря об этом, Г. В. Дорофеев уточняет, что «логические понятия всегда являлись “теневыми” в курсе математики, овладение логикой считается как бы естественным и автоматическим следствием изучения математики. Практика обучения показывает между тем, что это вовсе не так, поэтому привлечение специального внимания к этим вопросам может иметь в качестве следствия повышение уровня абстрактного мышления и логического развития учащихся, значимого вовсе не только с точки зрения изучения математики, но даже прежде всего не с точки зрения математики» [4, с. 41].

Исходим из целесообразности различения содержимого и содержания математического образования. В качестве исходного принимаем тезис о том, что «…математика существует в культуре как система мыслительных средств, необходимых для того, чтобы представлять отношения между мыслимыми сущностями в той или иной науке или сфере деятельности» [5, с. 61] и именно мыслительные средства являются содержанием математического образования.

Теневые понятия, во всяком случае некоторые из них, следует отнести к содержанию математического образования, понимаемого как «система мыслительных средств…». Например, логическая составляющая курса школьной математики может рассматриваться как система средств преобразования информации, средств выявления в информации объективных логических связей [6, с. 37]. Математические методы разной степени общности и назначения также можно отнести к мыслительным средствам.

Вопрос о методической целесообразности выявления теневого материала в инвариантной части содержания обучения и введения этого материала в учебный процесс требует обсуждения в каждом конкретном случае, впрочем, такой вопрос требует обсуждения и при включении в программу школьного курса дополнительного материала. Сказанное позволяет считать актуальной заявленную тему, проблема которой состоит в поиске содержательных резервов инвариантной части курса школьной математики и возможностей для их реализации в учебном процессе.

Цель – выявление скрытых в обучении элементов содержания школьного курса математики с целью полноты его реализации в учебном процессе.

Объект – содержание обучения математике в школе.

Предмет – теневые элементы содержания школьного курса математики.

Методы – анализ литературы, обобщение педагогического опыта.

При проектировании содержания общего образования на уровне учебного предмета учитывается современное представление о соответствующей научной области [7].

Если в XIX веке предмет алгебры рассматривался в связи с анализом уравнений, то начиная с двадцатых годов XX века это обобщенные алгебраических понятия, алгебраические структуры – группы, кольца, векторные пространства. Рассматривая взаимосвязь школьного курса алгебры и лежащих в его основе областей математики, А. Я. Блох обращает внимание на разницу. Если раньше уравнение – объект изучения и в школьной алгебре, и в алгебре как области математики, то сейчас уравнение, по-прежнему являясь одним из основных для школьного курса, перестало быть им в математике. Оно оказывается погруженным в частные разделы алгебры, такие как теория полей, с другой стороны, оно само находит обоснование в математической логике [3, с. 7].

В современном школьном курсе алгебры понятие алгебраической структуры неявно присутствует. Рассмотрим как именно.

Развитие понятия числа в школьном курсе алгебры отличается от логической схемы $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R} \subset C$. Тем не менее оно происходит в следующих расширениях числовых множеств: $\mathrm{N} \subset \mathrm{Q}^{+}$, $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$, $\mathrm{Q}^{+} \subset \mathrm{Q}$, $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$, приходящихся на 5–6-е классы. Последовательность этих переходов определяется неоднозначно. При определении структуры изложения авторы школьных учебников продумывают два основных: от положительных чисел к отрицательным, от целых чисел к дробным.

Приблизиться к логической схеме развития понятия числа есть возможность в начале 10-го класса в обобщающем разделе «Действительные числа», который предполагает ретроспективный анализ изученных числовых множеств и их свойств, а также разговор об операциях, заданных на $\mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ и свойствах этих операций.

Изучение векторов на плоскости в курсе геометрии с введением операций сложения векторов и умножения вектора на скаляр и изучением свойств этих операций – пример векторного пространства, изоморфного множеству пар действительных чисел.

В программе по математике начиная с 7-го класса представлено кольцо многочленов. В курсе алгебры и начал анализа профильного уровня рассматривается теория делимости для многочленов. В свое время Г. В. Дорофеев, мотивируя более основательное изучение темы многочленов в основной школе, особо отмечал методологически важный аспект теории многочленов, как возможность выявления глубинной взаимосвязи между такими разнородными внешне, в особенности для учащихся, математическими вопросами, как многочлены, натуральные и целые числа, соизмеримость и несоизмеримость отрезков, иррациональные числа [4, с. 202].

Однако даже при изучении теории делимости в кольце многочленов подобные связи между крупными разделами школьного курса математики остаются вне поля зрения учителя, учащихся, авторов учебников. Этот материал – как связь между различными разделами математики – следует считать систематизирующим. Фактически для установления этих связей можно обойтись ремаркой учителя или автора учебника, обратив внимание учащихся на то, что на множестве многочленов, как и на множестве целых чисел, в общем случае операция деления не выполняется. Условия «делимости нацело» породили соответствующие разделы математики. Многие свойства делимости и в теории чисел, и на множестве многочленов формулируются и доказываются одинаково с точностью до обозначений. Свойства, которые на первый взгляд различаются, могут стать специальным вопросом для школьного исследования. Например, это

$(\forall a, b \in Z)(a \vdots b \wedge b \vdots a \rightarrow a = \mp b)$

В обобщенном виде формулируется

$(\forall a, b \in K)(a \vdots b \wedge b \vdots a \rightarrow a = \varepsilon \cdot b)$,

где $< K; +, \cdot >$ – кольцо, $\mathcal{E}$– его обратимый элемент. В частности, делящиеся друг на друга многочлены отличаются на обратимый элемент кольца коэффициентов, для многочленов с действительными коэффициентами – на число, отличное от нуля.

Что касается ключевого понятия алгебраической операции, то не однажды в процессе расширения понятия числа возникает повод для разговора о замкнутости того или иного числового множества.

Таким образом, в современном курсе школьной математики частично реализуется понятие алгебраической структуры. При этом содержание понятия алгебраической структуры скрыто в обучении. Учащиеся осваивают примеры конкретных алгебраических структур, т. е. начинает формироваться объем понятий «группа», «кольцо», «поле», «векторное пространство». Обобщенное определение и термины не вводятся. Даже в этих условиях обсуждение свойств операций, заданных на таких разных множествах, с выявлением «одинаковой устроенности» кольца целых чисел и кольца многочленов возможно, полезно и не требует больших временных затрат.

Наряду с алгебраическими структурами, как системообразующими понятиями школьного курса, которые скрыты в обучении, в математическом содержании присутствует материал, который также может быть назван теневым. Основание для этого – неполнота его изучения или «временная разбросанность». Учебный материал приобретает такой характер в связи с особенностями построения курса математики, которое, в свою очередь, определяется общими закономерностями процесса обучения. Структурируется учебный материал на основе выделения так называемых содержательно-методических линий.

Вообще содержание учебного курса – системный объект, на который распространяются общие принципы эффективности функционирования систем [8; 9]. Как системный объект, содержание обучения может быть охарактеризовано с точки зрения логической структуры учебного материала, за которой стоят структурные особенности науки, а также с точки зрения структуры изложения учебного материала, учитывающей закономерности процесса обучения. Логическая структура не является нейтральной характеристикой содержания учебного курса по отношению к структуре изложения. Для математики, где предметные знания – один из ведущих компонентов содержания, последовательность изложения не выбирается произвольно. Тем не менее логическая структура позволяет использовать в большинстве случаев несколько логически правильных последовательностей изложения материала [10, с. 59]. Ясно, что такая вариативность ставит вопрос о методической целесообразности той или иной последовательности.

Понятие содержательно-методической линии – специфическая категория, которая используется для анализа методических особенностей учебных материалов, в частности для определения степени соответствия логической структуры содержания и структуры его изложения. В описании А. Я. Блоха [3, с. 35] содержательно-методическая линия представляет собой сечение курса школьной математики, в которое попадают тематически и идейно связанные, но композиционно разъединенные фрагменты учебников. Материал, относящийся к каждой линии, изучается длительное время, нередко на протяжении всего курса, так что ее можно рассматривать с точки зрения установления преемственных и внутрипредметных связей. С ее помощью возможно выделить отдельные стороны содержания обучения, проследить за формированием групп связанных понятий школьного курса математики.

Распределение учебного материала по главам, параграфам, пунктам в пособиях обычно не находится в непосредственной связи с принадлежностью его к той или иной содержательно-методической линии. Но система основных понятий и приемов каждой линии в ходе обучения постепенно оформляется, образуя блоки. На определенном этапе желательна перестройка уже изученного материала, замена хронологических связей в изучаемом материале логическими. Кроме того, в операционной сфере сворачиваются (расчлененные до этого) процедуры в единый исполнительный комплекс [3, с. 38]. Этот процесс А. Я. Блох называет синтезом. Как правило, синтез происходит на этапе повторения.

Признаками теневого материала в описанном контексте обладают некоторые математические методы, задействованные в курсе. В школьном курсе математики рассматриваются математические методы различной степени общности и значимости. Термин «метод» используется и для метода математического моделирования, метода математической индукции, метода доказательства от противного, метода введения вспомогательной переменной и для локального приема преобразования выражений метода выделения полного квадрата. Для метода выделения полного квадрата, видимо, более уместно было бы использовать термин «прием», но не будем нарушать традиции устоявшихся словосочетаний.

Ни в одной из действующих программ по математике для основной школы не упоминается метод выделения полного квадрата [11; 12].

В прошлой редакции программы по математике [13, с. 25] в разделе «Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)» упоминается действие «выводить формулу корней квадратного уравнения». Как известно, доказательство основано на выделении полного квадрата. Именно для более осознанного вывода формулы корней квадратного уравнения предусматривается знакомство с этим приемом преобразования квадратного трехчлена. Позже прием используется точечно в различных темах при решении немногочисленных задач, в частности в задачах на доказательство числовых неравенств, при разложении многочленов на множители и в некоторых других. Таким образом изучение приема «расслаивается» по сферам его применения. Значение условий, определяющих расслоение, намного превосходит факт единства математического объекта, служащего основой производимых действий [3]. При такой структуре изложения не виден, в частности, диапазон применимости метода и материал, с ним связанный, имеет признаки теневого. Для того, чтобы этот прием стал рабочим для школьников, необходимы специальные методические усилия для синтеза учебного материала, связанного с методом. Благоприятные условия возникают, как уже было сказано, при обобщающем повторении.

Ниже приведены задачи, которые дают представление о диапазоне применимости метода выделения полного квадрата. Предложенные задания соответствуют курсу алгебры основной школы.

1. Докажите неравенство:

1) $x^2 + 2x + 20 \geq 0$;
2) $x^2 - 6x + 10 \geq 0$;
3) $x^2 + x + 2 \geq 0$;
4) $x^2 + y^2 \geq 2xy$;
5) $x^2 + y^2 \geq xy$;
6) $a^2 + 2b^2 + 2ab + b + 10 > 0$;
7) $5x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 5 > 0$;
8) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.

2. Разложите на множители выражения:

1) $6c + x^2 - c^2 - 9$;
2) $a^2 + 2ab - c^2 - 12c + b^2 - 36$;
3) $x^4 + 4$;
4) $n^4 + n^2 + 1$;
5) $n^4 + 6n^2 - 7$.

3. Найдите пару чисел, при которых значение выражения $x^2 - 24y + 10x + 9y^2 + 41$ становится наименьшим.

4. Определите, какую линию на плоскости задает уравнение

$x^2 - 14x + 6y + y^2 + 49 = 0$.

5. Докажите, что значение выражения

$\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

является натуральным числом.

6. Упростите выражения:

1) $\sqrt{21+12\sqrt{3}}$;
2) $\sqrt{52-14\sqrt{3}}$;
3) $\sqrt{54-20\sqrt{2}}$;
4) $\sqrt{61+28\sqrt{3}}$.

7. Упростите выражения

а) $\sqrt{2+\sqrt{9+\sqrt{32}}}$;
б) $\sqrt{6-\sqrt{25+\sqrt{96}}}$;

8. Известно, что $a + \frac{3}{a} = 2$. Найдите значение выражения $a^2 + \frac{9}{a^2}$.

Докажите, что число 2018·2020·2022·2024+16 является точным квадратом.

В статье уточнено понятие «теневые элементы содержания обучения математике в школе», намечены направления поиска теневого материала, одно из которых – выявление понятий-проекций соответствующей научной области. Описаны примеры теневого материала, изучение которого будет целесообразно в условиях обобщающего повторения. Это методы и приемы разной степени общности, так или иначе задействованные в школьной программе по математике. Детализировано содержание для метода выделения полного квадрата. В перспективе возможна детальная разработка линии «Математический язык и логика», содержание которой по существу целиком является теневым и для курса школьной алгебры, и для геометрии. Программа по математике не выделяет эту линию в качестве основной. В учебниках потенциально логико-языковые понятия присутствуют, но не всегда выявляются в обучении.

Деятельность, связанная с выявлением и специальным изучением теневых элементов содержания обучения математике в школе, с оценкой методической целесообразности введения этого содержания в учебный процесс, с адаптацией теневого содержания, направлена на формирование ключевых профессиональных умений учителя математики.

Список источников

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утв. распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/download/2744/ (дата обращения: 11.11.2025).

2. Брейтигам Э. К., Кисельников И. В., Кошева Д. П. Реализация Концепции развития математического образования в Алтайском государственном педагогическом университете // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. 2016. № 3 (28). С. 93—95.

3. Блох А. Я. Школьный курс алгебры: метод. разраб. для слушателей ФПК. М.: МГПИ, 1985. 90 с.

4. Дорофеев Г. В. Математика для каждого / предисл. Л. Д. Кудрявцева. М.: Аякс, 1999. 292 с.

5. Боровских А. В. О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как система мыслительных средств // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. 2024. № 2. С. 61—82.

6. Тыщенко О. А. Выявление и реализация логической составляющей школьного курса математики как неотъемлемая часть профессиональной подготовки учителя // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. 2025. № 1 (62). С. 34—38.

7. Теоретические основы содержания общего среднего образования / М. Н. Скаткин, В. С. Цетлин, В. В. Краевский и др.; под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. М.: Педагогика, 1983. 352 с.

8. Carl N. Brooks Training System Evaluation Using Mathematical Models // Educational Technology. 1969. Vol. 9, No. 6: Applying Systems Engineering Techniques to Education and Trainning. Pp. 54—61.

9. Ильина Т. А. Структурно-системный подход в организации обучения. М.: Знание, 1973. Вып. 3. 78 с.

10. Профессиональная ориентация школьников и студентов на педагогическую деятельность в математическом образовании: коллективная монография / под ред. Э. К. Брейтигам, И. В. Кисельникова. Барнаул: АлтГПУ, 2017. 216 с.

11. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень) (для 5—9 классов образовательных организаций). М., 2023. 106 с.

12. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (углубленный уровень) (для 7—9 классов образовательных организаций). М., 2023. 101 с.

13. Алгебра: сборник рабочих программ. 7—9 классы : пособие для учителей общеобразоват. организаций / [сост. Т. А. Бурмистрова]. 2-е изд., доп. М.: Просвещение, 2014. 96 с.

Статья поступила в редакцию 03.03.2025; одобрена после рецензирования 13.06.2025; принята к публикации 23.06.2025.

The article was submitted 03.03.2025; approved after reviewing 13.06.2025; accepted for publication 23.06.2025.