УДК 373.5.016:002 DOI 10.37386/2413-4481-2025-4-42-49

Любовь Андреевна Линевич
Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия, linevich_la@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ФУНКЦИИ» В ШКОЛЕ

Аннотация. В статье рассматривается применение математической динамической программы GeoGebra при обучении школьников математике с целью визуализации процесса обучения. Автором описаны преимущества применения данной программы в учебном процессе. На примере темы «Функция» было рассмотрено применение программы GeoGebra как средства визуализации математических объектов, что позволяет оптимизировать процесс обучения, а также повысить уровень самостоятельности обучаемого. При этом были использованы задачи, которые будут предложены школьникам при прохождении обязательного государственного экзамена.
Ключевые слова: функция; график функции; математические динамические программы; GeoGebra; визуализация математических объектов.

Lyubov A. Linevich
Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia, linevich_la@mail.ru

USING THE DYNAMIC MATHEMATICS SOFTWARE GEOGEBRA IN TEACHING FUNCTIONS AT SECONDARY SCHOOL

Abstract. The article examines the use of the dynamic mathematics software GeoGebra in teaching mathematics at school, with a focus on visualizing the learning process. The advantages of using this program in mathematics instruction are described. Using the topic “Functions” as an example, the article demonstrates how GeoGebra can serve as a tool for visualizing mathematical objects, thereby optimizing the learning process and enhancing students’ independence. Tasks similar to those used in the compulsory state examination are also applied.
Keywords: function; graph of a function; mathematical dynamic programs; GeoGebra; visualization of mathematical objects.

Информатизация образования представляет сложный и многогранный процесс, который заключается в использовании возможностей информационных технологий в сфере образования. Прежде всего это связано с разработкой методологии оптимального использования компьютерных программ в процессе обучения.

Применение компьютерных технологий в сфере образования позволяет разрабатывать и применять новые подходы к процессу обучения, реализовывать новые методы обучения, использовать новые формы подачи учебного материала, способствует визуализации процесса обучения. Интерактивные динамические модели, которые объединяют в себе конструирование, динамическое варьирование, эксперимент, «не только выполняют иллюстративную функцию в обучении, но и позволяют целенаправленно и эффективно реализовать познавательную функцию наглядности, обладают богатым когнитивно-образовательным потенциалом для формирования необходимых компетенций» [1].

Динамические математические программы можно отнести к наиболее эффективным средствам обучения математике с применением компьютерных технологий. В отличие от традиционного геометрического чертежа или графика функции, выполненных учащимся на листе бумаги, построение, созданное с помощью такой системы, – это модель, сохраняющая не только результат построения, но и его исходные данные, алгоритм и зависимости между объектами. При этом данные легко и быстро (в режиме реального времени) меняются. Например, динамические программы позволяют передвигать, поворачивать объекты, изменять их размеры, вводить разные значения параметров, определяющих используемые объекты.

Использование программ динамической математики, таких как «Живая математика», «Живая Геометрия», «1С: Математический конструктор» и др., предоставляют широкие возможности для организации активной и плодотворной учебно-познавательной деятельности школьников, стимулирования их творческой активности и познавательной самостоятельности. Все большую популярность среди учителей и преподавателей математики в последнее время приобретает программа GeoGebra.

Использование динамической программы GeoGebra позволяет учителю реализовать следующие дидактические возможности. Во-первых, реализуется системно-деятельностный подход, направленный на развитие не только учебно-познавательной, но и исследовательской деятельности учащихся, поскольку GeoGebra может эффективно применяться не только в передаче знаний, но и способствовать саморазвитию ученика. Во-вторых, при изучении математики применение среды GeoGebra способно более эффективно влиять на развитие познавательного интереса обучающихся за счет интерактивности средств, легкости построения чертежей, высокой степени наглядности [2].

Визуализация математических объектов является одной из самых важных составляющих учебного процесса. Использование компьютерных программ позволяет оптимизировать процесс обучения, при этом меняется роль учителя, который уже не просто является источником учебной информации, а прежде всего выступает в качестве координатора учебного процесса, вследствие чего повышается уровень самостоятельности обучаемого.

В данной статье мы рассмотрим применение программы GeoGebra при изучении темы «Функции». Интерес к вопросам, связанным с восприятием, трактовкой и употреблением понятия «функция», обусловлен тем, что функциональное соответствие является центральным в математике и экспериментальных работах по моделированию реальных процессов [3].

Впервые фундаментально с понятием функции учащийся сталкивается в 7-м классе (тема «Линейная функция»). Конечно, «погружение» в данную тему происходит постепенно, по принципу «от простого к сложному», однако при систематизации полученных знаний мы сталкиваемся с проблемой недостаточного усвоения взаимосвязи коэффициентов функции с ее графиком. Понятие функции является абстрактным и достаточно сложным для восприятия учащимися, поэтому задача учителя состоит в том, чтобы изучение данного вопроса сделать максимально наглядным и понятным [4].

При изучении темы «Линейная функция» важно, чтобы в итоге учащийся понимал, как меняется график функции при изменении ее коэффициентов. Поэтому после того, как последовательно были рассмотрены свойства линейной функции, стоит посвятить один урок интеграции полученных знаний. На данном уроке мы предлагаем в качестве одного из инструментов использовать программу GeoGebra. Инструмент «Ползунок» в программе позволяет максимально визуализировать взаимосвязь коэффициентов линейной функции и ее графика.

Линейная функция задается уравнением $y = kx + b$. С помощью инструмента «Ползунок», следуя инструкции, которую предлагает программа, зададим границы и шаг изменения коэффициентов k и b . Для наиболее полной иллюстрации свойств коэффициентов границы их изменения должны обязательно включать положительные и отрицательные значения, а также нулевое значение. Мы в качестве промежутка изменения значений параметров выбрали отрезок [-5; 5]. По умолчанию шаг выбирается равным 0,1, однако можно задать любое другое значение. Стоит также отметить с помощью инструмента «Пересечение» общую точку прямой с осью ординат, чтобы проиллюстрировать геометрический смысл коэффициента $y = x + 1$. На рисунке 1 представлен график прямой .

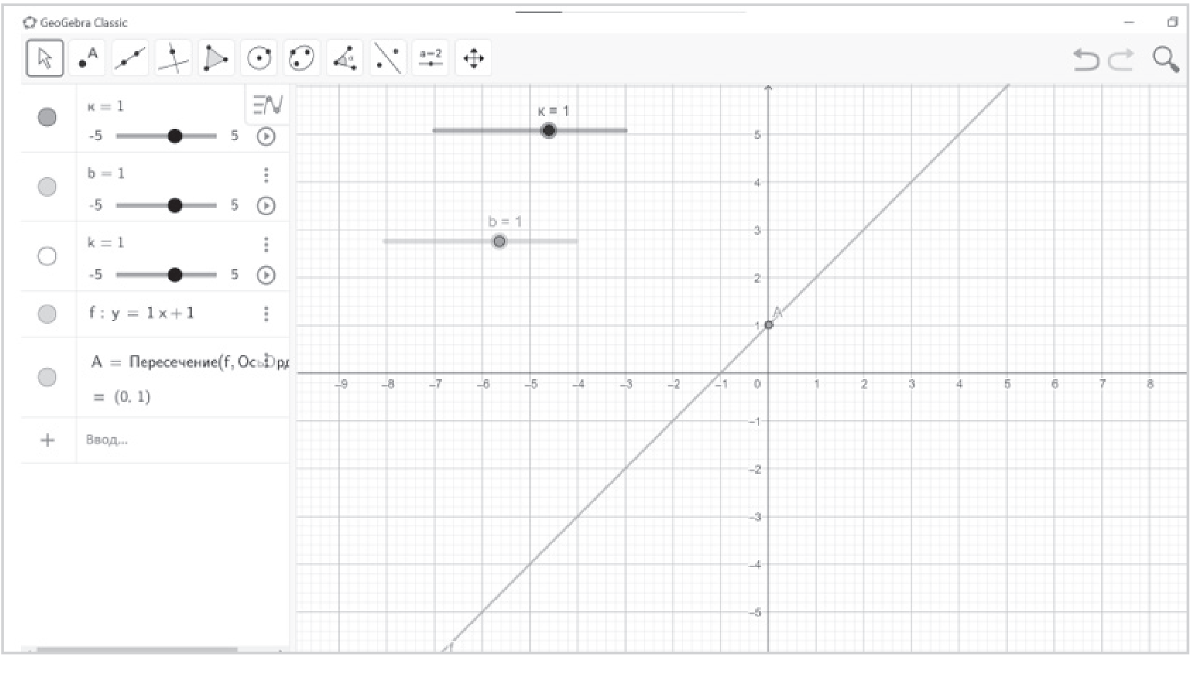

Рис. 1. График прямой $y = x + 1$

Перемещая ползунок для коэффициента k мы проиллюстрируем учащемуся, что данный коэффициент отвечает за угол между прямой и положительным направлением оси Ox, причем стоит заострить внимание школьника на том, что $k = 0$ при мы получим прямую, параллельную оси Ox, при положительном k угол будет острым, при отрицательном – тупым (рис. 2). Значения коэффициентов можно задавать и на панели объектов, однако перемещение ползунка позволяет более наглядно проиллюстрировать свойства коэффициентов.

Аналогично перемещая ползунок для коэффициента b, мы сможем показать, как меняется точка пересечения прямой и оси ординат (рис. 3).

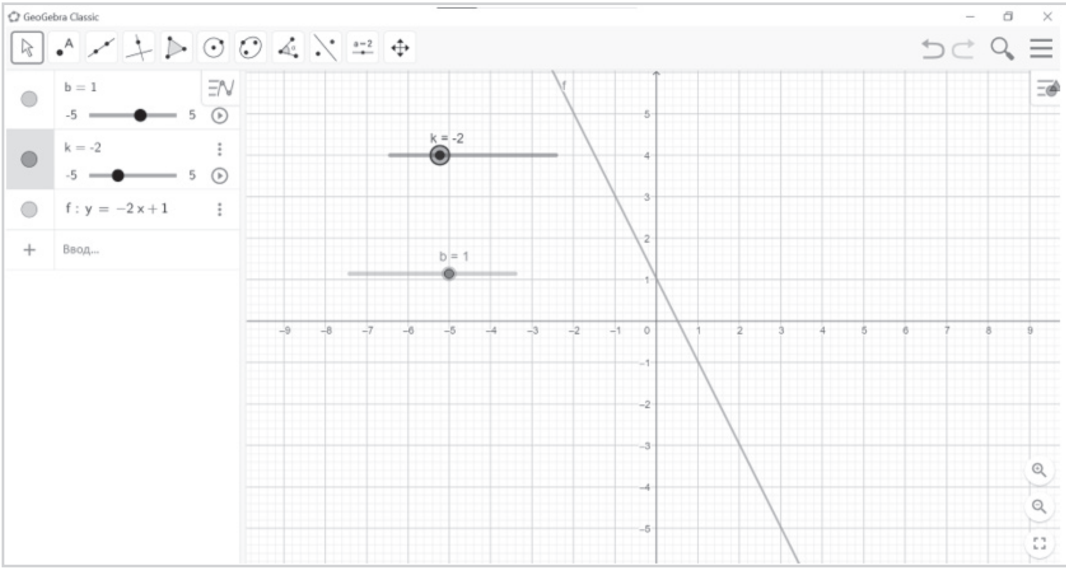

Рис. 2. Изменение графика прямой, при изменении коэффициента k

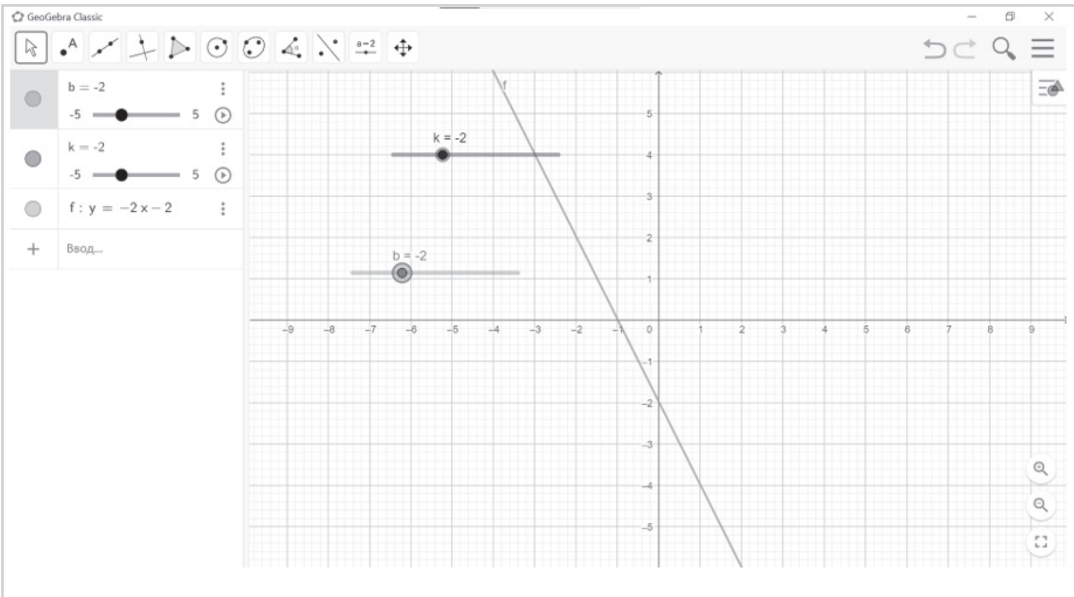

Рис. 3. Изменение графика прямой, при изменении коэффициента k

Особое внимание школьника стоит обратить на уравнения координатных осей и прямых, им параллельных. Понимание данных частных случаев очень важно для более фундаментального освоения учебного материала (рис. 4).

В дальнейшем знания учащихся о функциях будут расширяться. Знание взаимосвязи коэффициентов функций и их графиков позволит школьнику решать задачи более высокого уровня сложности, а именно задачи с параметром.

К концу 9-го класса учащиеся уже знакомы с линейной, квадратичной, дробно-рациональной функциями, с функцией $y = \sqrt{x}$, а также с кусочно-заданными функциями.

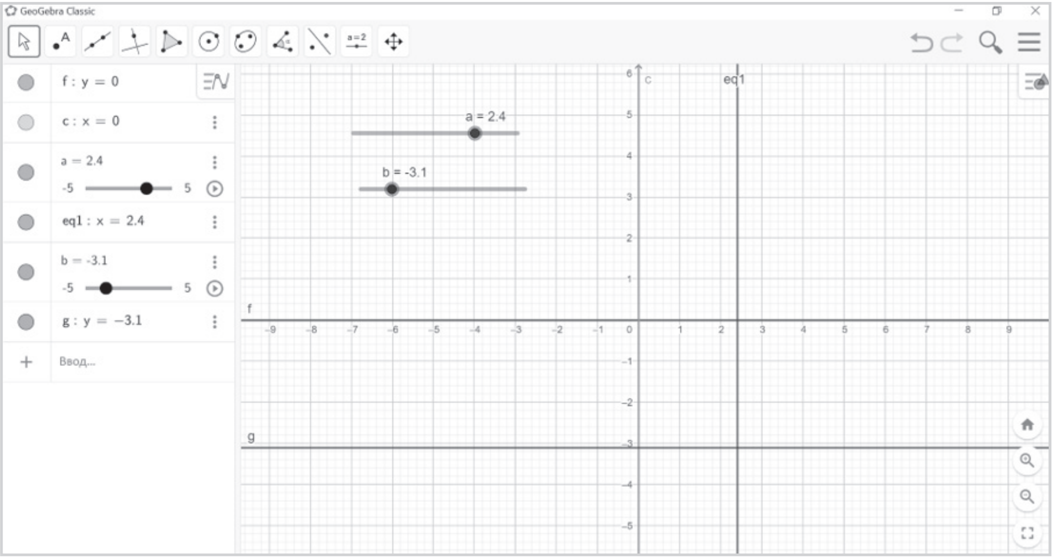

Рис. 4. Графики прямых, параллельных осям координат

Для каждой из вышеперечисленных функций можно рассмотреть типовые задачи, наглядно иллюстрирующие основные свойства коэффициентов функций и их графиков, а также взаимосвязь между ними. Данный материал поможет ученику правильно строить графики функций и достаточно легко решать задачи с параметром. Следует отметить, что особое внимание нужно уделять разработке методических рекомендаций по применению GeoGebra на уроках математики.

Рассмотрим возможности применения данной программы при решении задач с параметром по теме «Функции» на уроках математики. Задачи, решение которых мы рассматриваем ниже, были взяты из государственной итоговой аттестации по математике.

Задача 1 (квадратичная функция). Постройте график функции $y = \frac{(x-4)(x^2+3x+2)}{x+1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку [5].

Чтобы найти искомые значения параметра, школьнику предварительно нужно построить график заданной функции. Не каждый ученик сможет сразу определить, что графиком функции является парабола, с выкалыванием одной точки из ее области определения. Потому для того, чтобы как-то подтолкнуть учащегося к правильному построению графика, мы сначала предлагаем построить его с помощью динамической среды GeoGebra (см. рис. 5). Результат построения демонстрирует, что мы получили параболу. Следовательно, это позволяет предположить, что перед нами квадратичная функция. Проводя дальнейшие рассуждения, учащийся может сделать вывод о необходимости преобразования заданной функции к виду $y = ax^2 + bx + c$.

Прежде чем начальную функцию привести к виду $y = ax^2 + bx + c$, стоит обратить внимание ученика на то, что предварительно стоит найти область определения начальной функции, так как при преобразовании выражения, в результате сокращения дроби, область определения функции может измениться. Пояснив, почему точка с абсциссой x = – 1 (на рис. 6 это точка A) не попадает в область определения, можно предложить ученику преобразовать функцию, чтобы уравнение, с помощью которого она задается, стало проще и представляло собой классическое уравнение параболы.

Прямая $y = m$ является прямой, параллельной оси абсцисс. Анализируя построенный с помощью GeoGebra график, с учетом выколотой точки A, школьнику намного проще понять, что данная прямая пересекает график функции в единственной точке только при $m = -1$ и $m = 3$ (см. рис. 7). На наш взгляд, для получения решения более общей задачи стоит предложить учащемуся понять, сколько еще точек пересечения может иметь прямая $y = m$ с графиком функции

$$y = \frac{(x-4)(x^2+3x+2)}{x+1}$$

и при каких значениях параметра m.

Задача 2 (дробно-рациональная функция). Постройте график функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку [5].

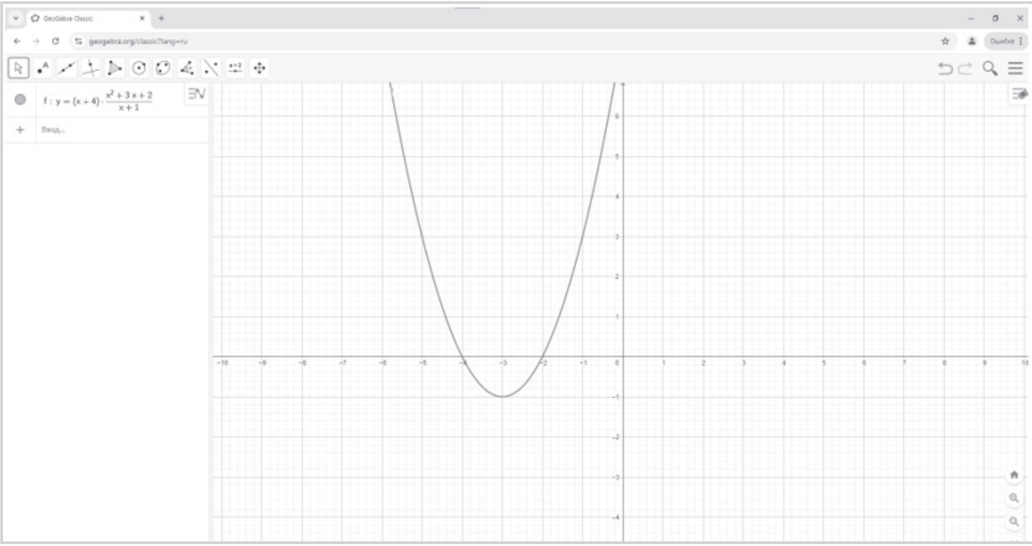

Рис. 5. График функции $y = \frac{(x-4)(x^2+3x+2)}{x+1}$

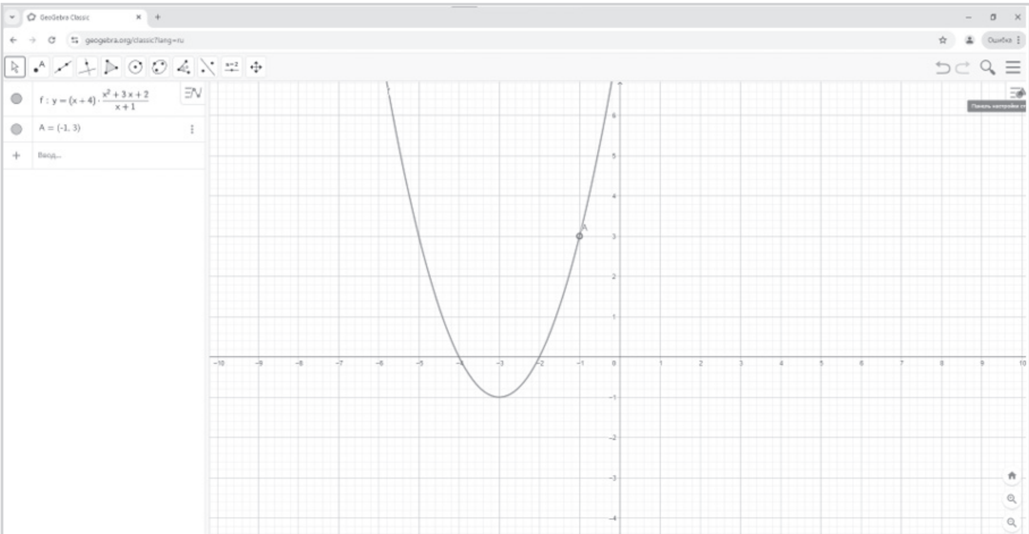

Рис. 6. График функции $y = \frac{(x-4)(x^2+3x+2)}{x+1}$ с учетом ее области определения

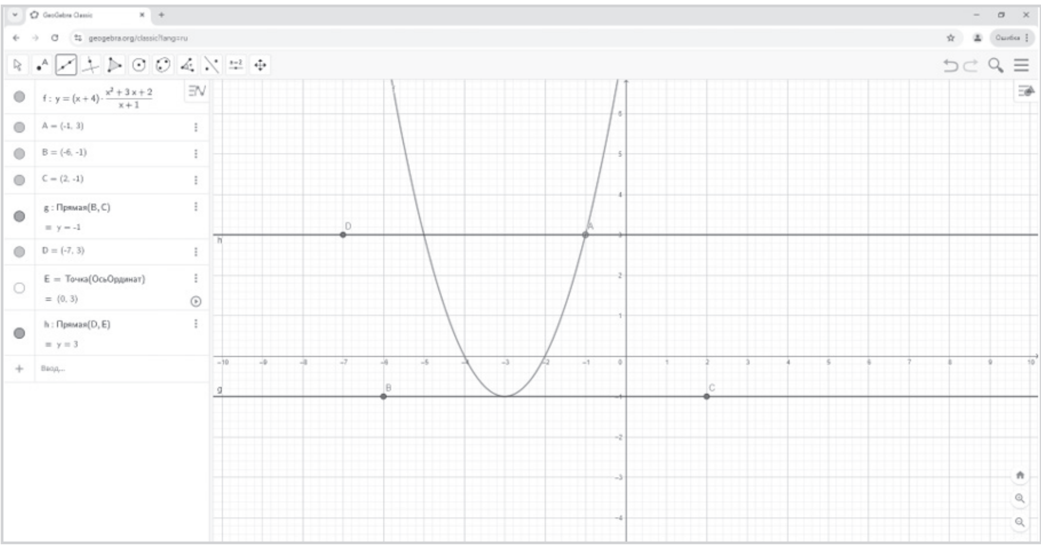

Рис. 7. Ответ на задачу 1

Как и при решении задачи 1, изначально необходимо построить график функции, для этого нужно понять тип функции. Визуально для школьника может показаться, что функции, предложенные в первой и второй задачах, имеют одинаковый тип графика. Однако прежде чем построить график функции в GeoGebra, на наш взгляд, сначала нужно предложить учащемуся найти область определения заданной функции, заострив внимание на том, что, приравнивая знаменатель к нулю, мы получим неполное квадратное уравнение. После разложения знаменателя на линейные множители, то есть представления его в виде $2x^2 - x = x(2x-1)$, становится очевидным сокращение исходной дроби. Следовательно, получив уравнение функции $y = -\frac{1}{x}$, ученик автоматически сделает вывод, что графиком является гипербола. Далее, стоит предложить ученику построить график начальной функции в программе GeoGebra, учитывая найденную область определения, чтобы проверить правильность графика, построенного им самостоятельно (рис. 8).

При решении задачи 2, в отличие от задачи 1, учащийся проявляет большую самостоятельность, он уже использует программу для проверки правильности построенного им графика. График, построенный в GeoGebra, конечно, более удобен для ответа на второй вопрос задачи, чем график, построенный от руки.

График прямой $y = kx$, проходящей через начало координат, построим, используя программу GeoGebra (используя инструмент «Ползунок»), чтобы учащийся, изменяя угол наклона прямой, мог понять, в каком случае график гиперболы и прямая $y = kx$ будут иметь только одну общую точку (рис. 9). И уже подставляя координаты точки A в уравнения прямой, получает искомое значение параметра.

Задача 3 (кусочно-заданные функции). Постройте график функции $y = |x-2| - |x-1| + x - 2$ и найдите значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки [5].

В виду того, что многим ученикам данная функция покажется гораздо более сложной, чем предыдущие, стоит начать решение задачи с построения графика функции в динамической среде GeoGebra (рис. 10).

После построения графика стоит напомнить учащимся определение кусочно-заданной функции и обратить их внимание на то, что график функции представляет собой совокупность отрезка и двух лучей, которые являются частью каких-либо прямых. Следует отметить, в каких точках происходит замена одной прямой на другую.

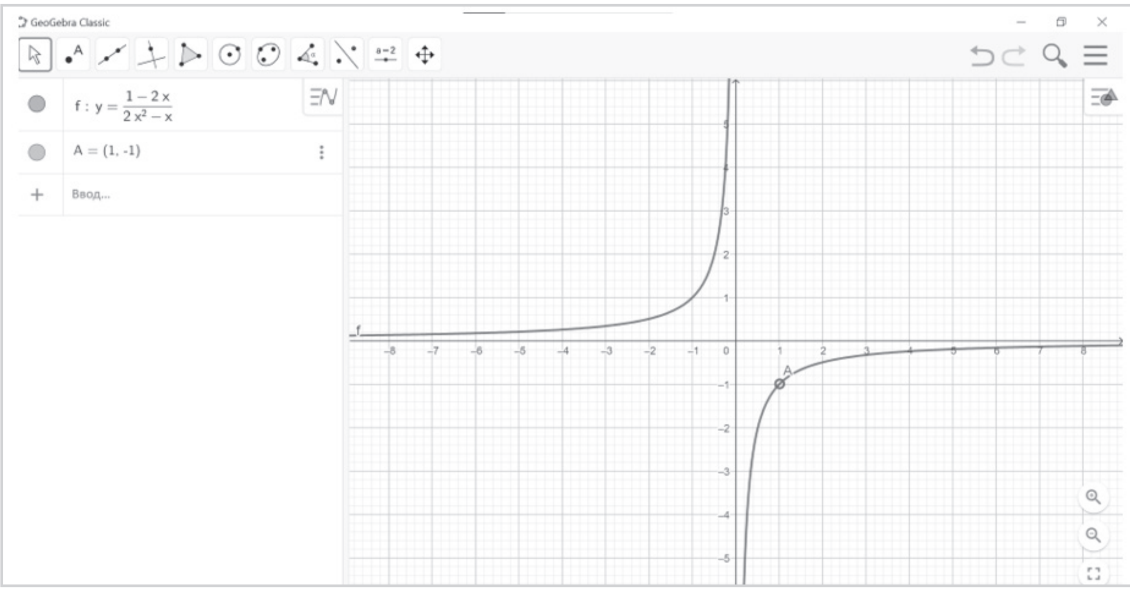

Рис. 8. График функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$

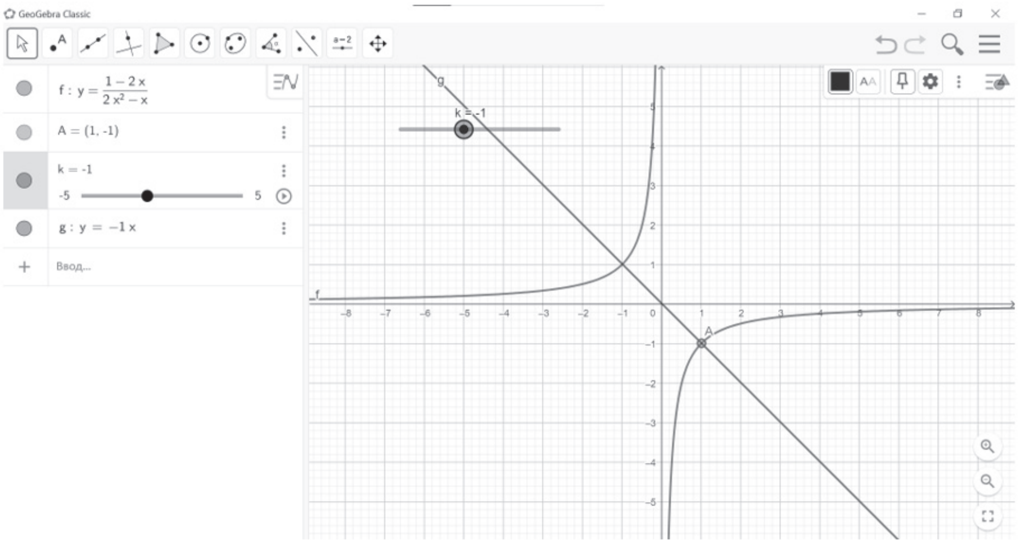

Рис. 9. Пересечение графика функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ и прямой $y = kx$

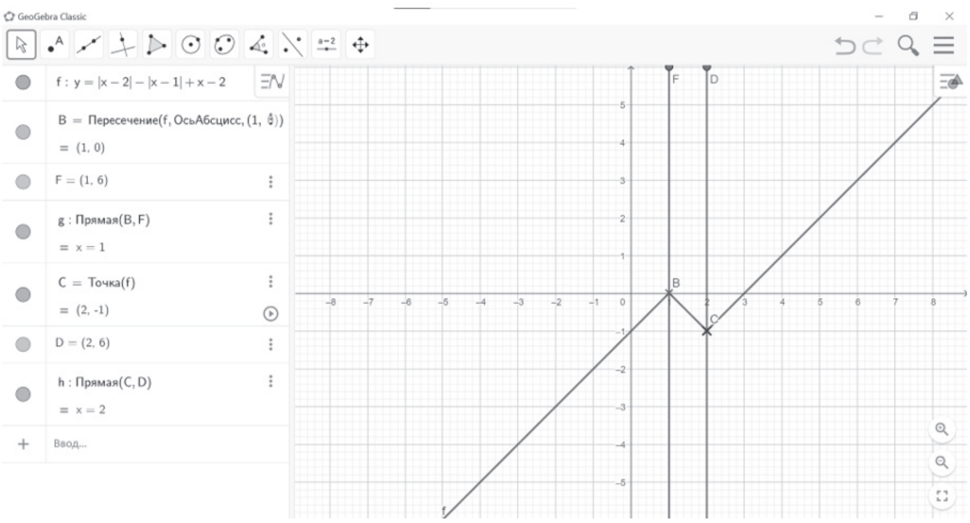

Рис. 10. График функции

После построения графика стоит напомнить учащимся определение кусочно-заданной функции и обратить их внимание на то, что график функции представляет собой совокупность отрезка и двух лучей, которые являются частью каких-либо прямых. Причем следует отметить, в каких точках происходит замена одной прямой на другую.

Когда график построен, выявлены особенности этого графика, учащийся раскрывает модули, входящие в исходную функцию, получая функцию кусочно-заданную:

$$y = \begin{cases} x - 1, \text{если } x \leq 1, \\ 1 - x, \text{если } 1 < x < 2, \\ x - 3, \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Так как построение прямой было разобрано в задаче 1, то ответ на второй вопрос задачи стоит предложить найти ученику самостоятельно, не прибегая к помощи GeoGebra.

Впоследствии при усложнении изучаемых функций данная методика позволит повысить уровень усвоения учебной программы. Учащиеся будут изучать более сложные функции, графики которых будут зависеть от большего числа коэффициентов. Программа позволит не только построить функции, но и найти их точки пересечения, вычислить площади фигур, образованных при пересечении графиков заданных функций и многое другое.

Программа GeoGebra, на наш взгляд, занимает особое место среди динамических математических программ. Данная программа доступна любому школьнику, имеет понятный интерфейс и широкий спектр функций, что позволяет эффективно применять ее в процессе обучения. GeoGebra – это отличный инструмент, который позволяет значительно оптимизировать учебный процесс, повысить темп урока, а также расширить кругозор учащихся, что способствует повышению качества преподавания.

Список источников

1. Белик Е. В. Методические особенности использования интерактивных динамических моделей в процессе обучения математике в старшей школе // Информатика и образование. 2016. № 7. С. 41—44.

2. Чернышева Д. А., Кравченко Г. В. Возможности применения интерактивной среды GeoGebra в обучении студентов математическим дисциплинам // Сборник трудов всероссийской конференции по математике «МАК-2015». Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2015. С. 225—229.

3. Ненартович М. В. К вопросу использования динамической среды Geogebra при формировании некоторых понятий алгебры // Образование XXI века: тренды, новые модели эпохи цифровизации и провайдеры поколения NEXT: материалы Международной научно-практической конференции, Гродно, 20 января 2021 года / редкол.: С. А. Сергейко [и др.]. Гродно: Гродненский областной институт развития образования, 2021. С. 240—245.

4. Андрафанова Н. В., Назарян Д. С. Интерактивная геометрическая среда как средство компьютерной наглядности в обучении геометрии // Информационные технологии в обеспечении федеральных государственных образовательных стандартов: материалы международной научно-практической конференции. Елец, 2014. С. 76—80.

5. РЕШУ ОГЭ: официальный сайт. URL: https://oge.sdamgia.ru/ (дата обращения: 11.01.2025).

Статья поступила в редакцию 28.04.2025; одобрена после рецензирования 15.10.2025; принята к публикации 20.10.2025.

The article was submitted 28.04.2025; approved after reviewing 15.10.2025; accepted for publication 20.10.2025.