УДК 514.113.5

К.О. Кизбикенов

ЗАДАЧА ПОПОВИЧИ ДЛЯ ВЫПУКЛОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Аннотация. В статье доказана теорема об одном неравенстве в выпуклом пятиугольнике.

Ключевые слова: *выпуклый пятиугольник, задача Поповичи.*

K.O. Kizbikenov

PROBLEM POPOVICIU FOR CONVEX PENTAGON

Abstract. In this paper we prove a theorem about an inequality in a convex pentagon.

Key words: *convex pentagon, problem Popoviciu.*

Эта теорема – обобщение задачи для выпуклого четырехугольника. Она впервые предложена румынским математиком Поповичи (T. Popoviciu): Пусть P – выпуклый четырехугольник, A_1, B_1, C_1 и D_1 – середины его сторон BC, CD, DA и AB, s – четырехугольник,ограниченный прямыми AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, S и s – площади четырехугольников P и p. Доказать, что

$$S/5 > s > S/6.$$

Обобщение задачи Поповичи для выпуклого четырехугольника $ABCD$ на случай, когда

$$AA_0/A_0B = BB_0/B_0C = CC_0/C_0D = DD_0/D_0A = k,$$

где $k > 0$, сформулировано и доказано Ю.Г. Никоноровым [2] (точки A_0, B_0, C_0, D_0 принадлежат соответствующим сторонам AB, BC, CD, DA).

Пусть $ABCDE$ – произвольный **выпуклый пятиугольник**, A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 – середины сторон AB, BC, CD, DE, EA соответственно (рис. 1),

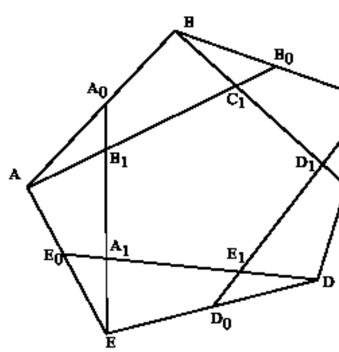

Рис. 1. Пятиугольник

A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 – точки пересечения пар отрезков (см. рис 1).

Теорема. *Площади S и s пятиугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ соответственно удовлетворяют неравенствам:*

$$\frac{1}{6} < \frac{s}{S} < \frac{51}{100}. \qquad (1)$$

В случае вырождения пятиугольника $ABCDE$ в треугольник при совпадении $3^{\text{х}}$ его соседних вершин (например при $B = C = D$) достигается равенство: $S/6 = s$; в случае вырождения пятиугольника ABCDE в треугольник при условиях: $EA = 0.9EB$, $ED = 0.7EC$, $A \in EB$, $D \in EC$ выполняется неравенство: $s > 127S/250$.

Эта теорема является усилением теоремы, доказанной Ф.А. Дудкиным в 2000 г., где было доказано неравенство $\frac{1}{6} < \frac{s}{S} < \frac{13}{25} = \frac{52}{100}$.

Доказательство теоремы.

1. *Выбор системы координат и условие выпуклости.*

А) При аффинных преобразованиях сохраняется отношение площадей. Поэтому для доказательства требуемых неравенств $1/6 < s/S < 51/100$ при любом выборе аффинной системы координат отношение s/S не изменится.

Б) Мы расположим начало координат в такой вершине пятиугольника E (обозначим ее через E), чтобы каждый из лучей $[EA)$ и $[ED)$ пересекал прямую BC (рис. 2).

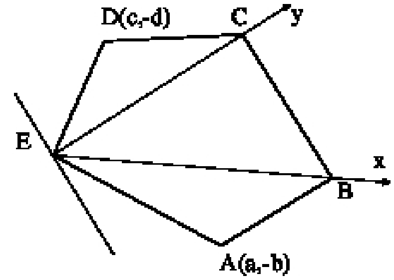

Рис. 2. Выбор координат

Нетрудно убедиться, что существование хотя бы одной такой вершины – следствие выпуклости пятиугольника $ABCDE$. Теперь аффинную систему координат присоединим к $ABCDE$ так, чтобы имели: $B(1,0)$, $C(0,1)$. Тогда вершины D и A будут соответственно во второй и четвертой координатных четвертях. Поэтому, положив $A(a,-b)$, $D(-c,d)$, будем иметь: $a>0, b>0, c>0, d>0$. Условие существования точек пресечения лучей EA и ED с прямой BC обеспечивает расположение вершин A и D в полосе между параллельными прямыми $x+y=1$ и $x+y=0$. Следовательно, выполняются неравенства:

$$0<a-b<1, \qquad 0<d-c<1. \tag{2}$$

Нетрудно убедиться, что вместе с неравенствами:

$$b>0, \qquad c>0, \qquad a>0, \tag{3}$$

эти условия достаточны для выпуклости пятиугольника $ABCDE$.

2. *Вычисления s/S через координаты вершин пятиугольника.*

Последовательно находим через a,b,c,d: координаты точек A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 – середин сторон пятиугольника $ABCDE$, затем – уравнения пяти прямых по двум точкам: AB_0, BC_0, CD_0, DE_0, EA_0, далее – координаты вершин пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Получим:

$A_1((1+a)(a+b)/(1+a+3b), -b(a+b)/(1+a+3b))$;
$B_1((1+2b+ac+bc+d-2ad)/(3-2a+4b+c+2bc+d-2ad), (1-a+b+d-ad+bd)/(3-2a+4b+c+2bc+d-2ad))$;
$C_1(c(1+c-d)/(2d-3c-4), (1+d)(d-c-2)/(2d-3c-4))$;
$D_1((acd-bc^2-2c^2-ac)/(2a+4c+bc-ad), (bcd-ad^2-bc+2ad+2dc)/(2a+4c+bc-ad))$;
$E_1((1+a)(ad-bc)/(b-2bc+2d+2ad), b(bc-ad)/(b-2bc+2d+2ad))$.

Зная координаты вершин обоих пятиугольников, можно найти s/S через переменные a,b,c,d, используя определители, но предварительно целесообразно ввести вместо a и d новые переменные.

3. *Замена переменных.*

Возросшее количество переменных (их стало четыре: a,b,c,d по сравнению с двумя-тремя в упомянутых выше задачах для четырехугольников) и возросшее количество неравенств (обеспечивающих выпуклость многоугольника), предопределило следующий шаг: ввести новые переменные u и v вместо a и d так, чтобы существенно упростились требования (2). Пусть $a=b+u/(1+u)$; $d=c+v/(1+v)$. Тогда формулы обратного перехода: $u=(a-b)/(b-a+1)$; $v=(d-c)/(c-d+1)$ позволяют условия (2), (3) на переменные a,b,c,d заменить следующими условиями на переменные b,c,u,v:

$$b>0, \qquad c>0, \qquad u>0, \qquad v>0. \tag{4}$$

В новых координатах, вычисляя площади пятиугольников, получим дробно рациональные выражения для $S(b,c,u,v)$ и $s(b,c,u,v)$. Выделим теперь в выражении $s(b,c,u,v)$, $S(b,c,u,v)$ многочлены $P(b,c,u,v)$ и $Q(b,c,u,v)$ такие, что $s/S=P/Q$, и докажем, что $P>0$, $Q>0$. Тогда доказательство неравенства $1/6<s/S<13/25$ сводится к доказательству двух неравенств: 1) $6P-Q>0$, 2) $51Q-100P>0$.

4. *Неравенство* $6P-Q>0$.

Пусть $X(b,c,v,u)=6P-Q$. Тогда получим следующее выражение для $X(b,c,v,u)$.

$$\begin{gathered}
X=4b^5(vc+c+2v+4)(53v^3+110v^2+9v+2)(u+1)^5+2b^4(2c^2(53v^3+302v^2+\\
+113v+u(241v^2+306v+13)+12)(v+1)^2+2(v+2)^2(212v^3+\\
+274v^2+130v+2u(188v^2-9v+3)+43)+c(v^2+3v+2)(424v^3+1482v^2+\\
+432v+4u(335v^2+264v+2)+41))(u+1)^4+b^3(4c^3(2(200v+99)u^2+\\
+(241v^2+930v+129)u+192v^2+276v+26)(v+1)^3+2c^2(1635v^3+4063v^2+2427v+\\
+2u^2(1377v^2+2440v+551)+u(2251v^3+9181v^2+8234v+520)+\\
+139)(v+1)^2+2(v+2)^2(396v^3+616v^2+541v+u^2(937v^2-100v+13)+u(1292v^3+\\
+1144v^2+565v+138)+96)+c(v^2+3v+2)(3864v^3+6308v^2+4276v+u^2(5553v^2+\\
+5052v+85)+u(6440v^3+15276v^2+6552v+1915)+1645))(u+1)^3+
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
+\, b^2(16c^4(53u^3+2(50v+79)u^2+2(78v+37)u+43v+6)(v+1)^4+2c^3(4(526v+483)u^3+ \\
+\,(4113v^2+10348v+4528)u^2+2(2956v^2+4405v+864)u+5(329v^2+383v+17))(v+1)^3+ \\
+\,c^2((6689v^2+13578v+4917)u^3+(14318v^3+47311v^2+ \\
+\,42639v+9830)u^2+(17658v^3+43584v^2+31200v+11711)u+4917v^3+ \\
+\,11711v^2+9830v+4917)(v+1)^2+(v+2)^2(2(495v^2-49v+6)u^3+ \\
+\,(2456v^3+1258v^2+865v+113)u^2+2(628v^3+1332v^2+1230v+151)u+52v^3+724v^2+ \\
+\,625v+53)+c(v^2+3v+2)((3825v^2+4948v+139)u^3+(9760v^3+18083v^2+10302v+ \\
+\,2427)u^2+(8616v^3+12772v^2+13806v+4063)u+2204v^3+4928v^2+6478v+ \\
+\,1635))(u+1)^2+(2u+1)^2(vc+c+v)(2c^4(53u^2+82u+4)(v+1)^4+ \\
+\,c^3(53u^3+(432v+625)u^2+(622v+724)u+40v+52)(v+1)^3+2c^2((55v+96)u^3+ \\
+\,(229v^2+689v+541)u^2+(261v^2+716v+616)u+4(8v^2+58v+99))(v+1)^2+ \\
+\,2u(v+2)^2((v+1)u^2+(4v^2-17v+4)u+4v^2+82v+53)+c(v^2+3v+2)((9v+ \\
+\,86)u^3+5(8v^2+35v+52)u^2+(-128v^2+322v+548)u+8(4v^2+82v+53)))+ \\
+\,b(2u^2+3u+1)(8c^5(53u^2+82u+4)(v+1)^5+2c^4(212u^3+ \\
+\,58(22v+27)u^2+9(201v+169)u+82v+16)(v+1)^4+c^3((1504v+ \\
+\,1635)u^3+(5496v^2+12621v+6478)u^2+(6657v^2+11121v+4928)u+ \\
+\,278v^2+1040v+2204)(v+1)^3+c^2(5(304v^2+687v+329)u^3+2(2511v^3+ \\
+\,7928v^2+7432v+2138)u^2+(4223v^3+11373v^2+12648v+6308)u+170v^3+3456v^2+ \\
+\,9056v+3864)(v+1)^2+(v+2)^2((102v^2+3v+1)u^3+2(188v^3-41v^2+ \\
+\,73v+2)u^2+(76v^3+1018v^2+845v+53)u+2v(4v^2+82v+53))+ \\
+\,c(v^2+3v+2)((467v^2+1105v+41)u^3+(1880v^3+ \\
+\,3235v^2+2426v+432)u^2+ \\
+\,(304v^3+2651v^2+5969v+1482)u+32v^3+3042v^2+3132v+424))
\end{gathered}
$$

Поэтому из неравенств (4) вытекает, очевидно, искомое неравенство $X(b,c,v,u)>0$, поскольку X представлено как сумма произведений только положительных многочленов.

5. Неравенство $\frac{s}{S}<\frac{51}{100}$.

Выражение $f=51S-100s$ имеет вид

$$
\begin{gathered}
824\,b^5cu^5v^4+3728\,b^4c^2u^5v^4+824\,b^4c^2u^4v^5+6200\,b^3c^3u^5v^4+3728\,b^3c^3u^4v^5+ \\
+\,3296\,b^2c^4u^5v^4+6200\,b^2c^4u^4v^5+3296\,bc^5u^4v^5+2504\,b^5cu^5v^3+ \\
+\,4120\,b^5cu^4v^4+1648\,b^5u^5v^4+12104\,b^4c^2u^5v^3+21176\,b^4c^2u^4v^4+3296\,b^4c^2u^3v^5+ \\
+\,10360\,b^4cu^5v^4+3296\,b^4cu^4v^5+21584\,b^3c^3u^5v^3+44024\,b^3c^3u^4v^4+ \\
+\,14120\,b^3c^3u^3v^5+21216\,b^3c^2u^5v^4+17404\,b^3c^2u^4v^5+13184\,b^2c^4u^5v^3+ \\
+\,41048\,b^2c^4u^4v^4+21992\,b^2c^4u^3v^5+16216\,b^2c^3u^5v^4+ \\
+\,31752\,b^2c^3u^4v^5+16480\,bc^5u^4v^4+9968\,bc^5u^3v^5+3296\,bc^4u^5v^4+19708\,bc^4u^4v^5+ \\
+\,1648\,c^5u^4v^5+1752\,b^5cu^5v^2+12520\,b^5cu^4v^3+8240\,b^5cu^3v^4+6656\,b^5u^5v^3+ \\
+\,8240\,b^5u^4v^4+13128\,b^4c^2u^5v^2+59976\,b^4c^2u^4v^3+47424\,b^4c^2u^3v^4+ \\
+\,4944\,b^4c^2u^2v^5+38904\,b^4cu^5v^3+ \\
+\,62606\,b^4cu^4v^4+13184\,b^4cu^3v^5+5808\,b^4u^5v^4+3296\,b^4u^4v^5+27552\,b^3c^3u^5v^2+ \\
+\,120288\,b^3c^3u^4v^3+107688\,b^3c^3u^3v^4+19992\,b^3c^3u^2v^5+79552\,b^3c^2u^5v^3+
\end{gathered}
$$

$$+\,168480\,b^3c^2u^4v^4+64702\,b^3c^2u^3v^5+21206\,b^3cu^5v^4+24880\,b^3cu^4v^5+$$
$$+\,19776\,b^2c^4u^5v^2+102192\,b^2c^4u^4v^3+114744\,b^2c^4u^3v^4+27960\,b^2c^4u^2v^5+$$
$$+\,63376\,b^2c^3u^5v^3+206430\,b^2c^3u^4v^4+108652\,b^2c^3u^3v^5+25428\,b^2c^2u^5v^4+$$
$$+\,54936\,b^2c^2u^4v^5+32960\,bc^5u^4v^3+49840\,bc^5u^3v^4+9312\,bc^5u^2v^5+$$
$$+\,13184\,bc^4u^5v^3+107804\,bc^4u^4v^4+56934\,bc^4u^3v^5+11566\,bc^3u^5v^4+41984\,bc^3u^4v^5+$$
$$+\,8240\,c^5u^4v^4+4160\,c^5u^3v^5+824\,c^4u^5v^4+8304\,c^4u^4v^5+88\,b^5cu^5v+$$
$$+\,8760\,b^5cu^4v^2+25040\,b^5cu^3v^3+8240\,b^5cu^2v^4+6864\,b^5u^5v^2+33280\,b^5u^4v^3+$$
$$+\,16480\,b^5u^3v^4+4856\,b^4c^2u^5v+60232\,b^4c^2u^4v^2+118864\,b^4c^2u^3v^3+$$
$$+\,52496\,b^4c^2u^2v^4+3296\,b^4c^2u\,v^5+44024\,b^4cu^5v^2+198770\,b^4cu^4v^3+$$
$$+\,146824\,b^4cu^3v^4+19776\,b^4cu^2v^5+22688\,b^4u^5v^3+40508\,b^4u^4v^4+13184\,b^4u^3v^5+$$
$$+\,15152\,b^3c^3u^5v+134000\,b^3c^3u^4v^2+252400\,b^3c^3u^3v^3+120920\,b^3c^3u^2v^4+$$
$$+\,12536\,b^3c^3u\,v^5+103264\,b^3c^2u^5v^2+456694\,b^3c^2u^4v^3+433226\,b^3c^2u^3v^4+$$
$$+\,89682\,b^3c^2u^2v^5+82122\,b^3cu^5v^3+195585\,b^3cu^4v^4+89368\,b^3cu^3v^5+$$
$$+\,7148\,b^3u^5v^4+9968\,b^3u^4v^5+13184\,b^2c^4u^5v+122288\,b^2c^4u^4v^2+$$
$$+\,239056\,b^2c^4u^3v^3+130024\,b^2c^4u^2v^4+14744\,b^2c^4u\,v^5+92832\,b^2c^3u^5v^2+$$
$$+\,491396\,b^2c^3u^4v^3+564496\,b^2c^3u^3v^4+134278\,b^2c^3u^2v^5+101962\,b^2c^2u^5v^3+$$
$$+\,339150\,b^2c^2u^4v^4+176488\,b^2c^2u^3v^5+14200\,b^2cu^5v^4+37120\,b^2cu^4v^5+$$
$$+\,32960\,bc^5u^4v^2+99680\,bc^5u^3v^3+46560\,bc^5u^2v^4+2704\,bc^5u\,v^5+19776\,bc^4u^5v^2+$$
$$+\,234136\,bc^4u^4v^3+287894\,bc^4u^3v^4+51368\,bc^4u^2v^5+47188\,bc^3u^5v^3+238785\,bc^3u^4v^4+$$
$$+\,112104\,bc^3u^3v^5+11380\,bc^2u^5v^4+37588\,bc^2u^4v^5+16480\,c^5u^4v^3+$$
$$+\,20800\,c^5u^3v^4+2988\,c^5u^2v^5+3296\,c^4u^5v^3+43640\,c^4u^4v^4+20192\,c^4u^3v^5+$$
$$+\,2504\,c^3u^5v^4+13520\,c^3u^4v^5+16\,b^5cu^5+440\,b^5cu^4v+17520\,b^5cu^3v^2+25040\,b^5cu^2v^3+$$
$$+\,4120\,b^5cu\,v^4+320\,b^5u^5v+34320\,b^5u^4v^2+66560\,b^5u^3v^3+16480\,b^5u^2v^4+$$
$$+\,104\,b^4c^2u^5+21120\,b^4c^2u^4v+109648\,b^4c^2u^3v^2+117776\,b^4c^2u^2v^3+$$
$$+\,28784\,b^4c^2u\,v^4+824\,b^4c^2v^5+15144\,b^4cu^5v+206950\,b^4cu^4v^2+406040\,b^4cu^3v^3+$$
$$+\,168436\,b^4cu^2v^4+13184\,b^4cu\,v^5+21104\,b^4u^5v^2+122144\,b^4u^4v^3+103952\,b^4u^3v^4+$$
$$+\,19776\,b^4u^2v^5+2984\,b^3c^3u^5+64592\,b^3c^3u^4v+252272\,b^3c^3u^3v^2+$$
$$+\,251312\,b^3c^3u^2v^3+63872\,b^3c^3u\,v^4+2936\,b^3c^3v^5+52736\,b^3c^2u^5v+$$
$$+\,502918\,b^3c^2u^4v^2+981872\,b^3c^2u^3v^3+500958\,b^3c^2u^2v^4+54874\,b^3c^2u\,v^5+$$
$$+\,97694\,b^3cu^5v^2+490211\,b^3cu^4v^3+526644\,b^3cu^3v^4+118824\,b^3cu^2v^5+27392\,b^3u^5v^3+$$
$$+\,69442\,b^3u^4v^4+32888\,b^3u^3v^5+3296\,b^2c^4u^5+71192\,b^2c^4u^4v+248624\,b^2c^4u^3v^2+$$
$$+\,240496\,b^2c^4u^2v^3+63528\,b^2c^4u\,v^4+2576\,b^2c^4v^5+60400\,b^2c^3u^5v+$$
$$+\,553128\,b^2c^3u^4v^2+1132940\,b^2c^3u^3v^3+624466\,b^2c^3u^2v^4+69608\,b^2c^3u\,v^5+$$
$$+\,145674\,b^2c^2u^5v^2+771307\,b^2c^2u^4v^3+894541\,b^2c^2u^3v^4+206202\,b^2c^2u^2v^5+$$
$$+\,60596\,b^2cu^5v^3+205126\,b^2cu^4v^4+105872\,b^2cu^3v^5+3680\,b^2u^5v^4+9312\,b^2u^4v^5+$$
$$+\,16480\,bc^5u^4v+99680\,bc^5u^3v^2+93120\,bc^5u^2v^3+13520\,bc^5u\,v^4+64\,bc^5v^5+$$
$$+\,13184\,bc^4u^5v+252664\,bc^4u^4v^2+582236\,bc^4u^3v^3+250516\,bc^4u^2v^4+14370\,bc^4u\,v^5+$$
$$+\,72168\,bc^3u^5v^2+531498\,bc^3u^4v^3+564755\,bc^3u^3v^4+94796\,bc^3u^2v^5+48350\,bc^2u^5v^3+$$
$$+\,208870\,bc^2u^4v^4+85274\,bc^2u^3v^5+3218\,bcu^5v^4+13520\,bcu^4v^5+16480\,c^5u^4v^2+$$

$$+ 41600\, c^5u^3v^3 + 14940\, c^5u^2v^4 + 692\, c^5u\,v^5 + 4944\, c^4u^5v^2 + 91520\, c^4u^4v^3+$$
$$+ 101366\, c^4u^3v^4 + 14348\, c^4u^2v^5 + 10448\, c^3u^5v^3 + 73288\, c^3u^4v^4 + 30272\, c^3u^3v^5+$$
$$+ 1752\, c^2u^5v^4 + 7184\, c^2u^4v^5 + 80\, b^5cu^4 + 880\, b^5cu^3v + 17520\, b^5cu^2v^2+$$
$$+ 12520\, b^5cu\,v^3 + 824\, b^5cv^4 + 64\, b^5u^5 + 1600\, b^5u^4v + 68640\, b^5u^3v^2 + 66560\, b^5u^2v^3+$$
$$+ 8240\, b^5u\,v^4 + 512\, b^4c^2u^4 + 35920\, b^4c^2u^3v + 98832\, b^4c^2u^2v^2+$$
$$+ 58344\, b^4c^2u\,v^3 + 6264\, b^4c^2v^4 - 336\, b^4cu^5 + 66374\, b^4cu^4v + 387560\, b^4cu^3v^2+$$
$$+ 414540\, b^4cu^2v^3 + 95024\, b^4cu\,v^4 + 3296\, b^4cv^5 - 1984\, b^4u^5v + 108788\, b^4u^4v^2+$$
$$+ 261696\, b^4u^3v^3 + 126888\, b^4u^2v^4 + 13184\, b^4u\,v^5 + 10584\, b^3c^3u^4 + 107496\, b^3c^3u^3v+$$
$$+ 228336\, b^3c^3u^2v^2 + 118656\, b^3c^3u\,v^3 + 12816\, b^3c^3v^4 + 7808\, b^3c^2u^5+$$
$$+ 222654\, b^3c^2u^4v + 952144\, b^3c^2u^3v^2 + 1000972\, b^3c^2u^2v^3 + 270078\, b^3c^2u\,v^4+$$
$$+ 12490\, b^3c^2v^5 + 36318\, b^3cu^5v + 480653\, b^3cu^4v^2 + 1091232\, b^3cu^3v^3 + 618482\, b^3cu^2v^4+$$
$$+ 69064\, b^3cu\,v^5 + 23844\, b^3u^5v^2 + 158312\, b^3u^4v^3 + 181888\, b^3u^3v^4 + 38856\, b^3u^2v^5+$$
$$+ 16248\, b^2c^4u^4 + 129096\, b^2c^4u^3v + 220944\, b^2c^4u^2v^2 + 106672\, b^2c^4u\,v^3+$$
$$+ 10496\, b^2c^4v^4 + 14728\, b^2c^3u^5 + 299028\, b^2c^3u^4v + 1098364\, b^2c^3u^3v^2+$$
$$+ 1121056\, b^2c^3u^2v^3 + 300084\, b^2c^3u\,v^4 + 12230\, b^2c^3v^5 + 87174\, b^2c^2u^5v+$$
$$+ 814611\, b^2c^2u^4v^2 + 1729480\, b^2c^2u^3v^3 + 950709\, b^2c^2u^2v^4 + 102684\, b^2c^2u\,v^5+$$
$$+ 82416\, b^2cu^5v^2 + 425984\, b^2cu^4v^3 + 505667\, b^2cu^3v^4 + 108192\, b^2cu^2v^5 + 14024\, b^2u^5v^3+$$
$$+ 48324\, b^2u^4v^4 + 23136\, b^2u^3v^5 + 3296\, bc^5u^4 + 49840\, bc^5u^3v + 93120\, bc^5u^2v^2+$$
$$+ 27040\, bc^5u\,v^3 + 320\, bc^5v^4 + 3296\, bc^4u^5 + 135596\, bc^4u^4v + 588684\, bc^4u^3v^2 + 488384\, bc^4u^2v^3+$$
$$+ 67706\, bc^4u\,v^4 + 228\, bc^4v^5 + 49036\, bc^3u^5v + 581624\, bc^3u^4v^2 + 1134816\, bc^3u^3v^3+$$
$$+ 455141\, bc^3u^2v^4 + 24732\, bc^3u\,v^5 + 74790\, bc^2u^5v^2 + 450017\, bc^2u^4v^3 + 425666\, bc^2u^3v^4+$$
$$+ 61212\, bc^2u^2v^5 + 17674\, bcu^5v^3 + 66627\, bcu^4v^4 + 20296\, bcu^3v^5 + 708\, bu^5v^4 + 2704\, bu^4v^5+$$
$$+ 8240\, c^5u^4v + 41600\, c^5u^3v^2 + 29880\, c^5u^2v^3 + 3460\, c^5u\,v^4 + 16\, c^5v^5+$$
$$+ 3296\, c^4u^5v + 95760\, c^4u^4v^2 + 203544\, c^4u^3v^3 + 71000\, c^4u^2v^4 + 3356\, c^4u\,v^5+$$
$$+ 16320\, c^3u^5v^2 + 157936\, c^3u^4v^3 + 152714\, c^3u^3v^4 + 20964\, c^3u^2v^5 + 7872\, c^2u^5v^3+$$
$$+ 39384\, c^2u^4v^4 + 11936\, c^2u^3v^5 + 88\, cu^5v^4 + 384\, cu^4v^5 + 160\, b^5cu^3 + 880\, b^5cu^2v+$$
$$+ 8760\, b^5cu\,v^2 + 2504\, b^5cv^3 + 320\, b^5u^4 + 3200\, b^5u^3v + 68640\, b^5u^2v^2 + 33280\, b^5u\,v^3+$$
$$+ 1648\, b^5v^4 + 1008\, b^4c^2u^3 + 29600\, b^4c^2u^2v + 44008\, b^4c^2u\,v^2 + 11560\, b^4c^2v^3-$$
$$- 1116\, b^4cu^4 + 114056\, b^4cu^3v + 361220\, b^4cu^2v^2 + 211520\, b^4cu\,v^3 + 21166\, b^4cv^4 + 192\, b^4u^5+$$
$$+ 2000\, b^4u^4v + 224112\, b^4u^3v^2 + 279104\, b^4u^2v^3 + 74912\, b^4u\,v^4 + 3296\, b^4v^5 + 14056\, b^3c^3u^3+$$
$$+ 86456\, b^3c^3u^2v + 98096\, b^3c^3u\,v^2 + 21040\, b^3c^3v^3 + 25354\, b^3c^2u^4+$$
$$+ 368066\, b^3c^2u^3v + 871564\, b^3c^2u^2v^2 + 485344\, b^3c^2u\,v^3 + 55082\, b^3c^2v^4 - 460\, b^3cu^5+$$
$$+ 172977\, b^3cu^4v + 952948\, b^3cu^3v^2 + 1153650\, b^3cu^2v^3 + 333342\, b^3cu\,v^4+$$
$$+ 14728\, b^3cv^5 - 4592\, b^3u^5v + 120078\, b^3u^4v^2 + 344640\, b^3u^3v^3 + 200492\, b^3u^2v^4+$$
$$+ 18920\, b^3u\,v^5 + 26776\, b^2c^4u^3 + 100696\, b^2c^4u^2v + 86288\, b^2c^4u\,v^2 + 16224\, b^2c^4v^3+$$
$$+ 62618\, b^2c^3u^4 + 512632\, b^2c^3u^3v + 959152\, b^2c^3u^2v^2 + 491996\, b^2c^3u\,v^3+$$
$$+ 49900\, b^2c^3v^4 + 18034\, b^2c^2u^5 + 397221\, b^2c^2u^4v + 1607890\, b^2c^2u^3v^2+$$
$$+ 1687150\, b^2c^2u^2v^3 + 447255\, b^2c^2u\,v^4 + 18034\, b^2c^2v^5 + 36076\, b^2cu^5v + 407130\, b^2cu^4v^2+$$
$$+ 911663\, b^2cu^3v^3 + 493411\, b^2cu^2v^4 + 47248\, b^2cu\,v^5 + 11960\, b^2u^5v^2 + 82740\, b^2u^4v^3+$$

$$+ 113234\, b^2u^3v^4 + 18440\, b^2u^2v^5 + 9968\, bc^5u^3 + 46560\, bc^5u^2v + 27040\, bc^5u\, v^2 + 640\, bc^5v^3 +$$
$$+ 28972\, bc^4u^4 + 297566\, bc^4u^3v + 475736\, bc^4u^2v^2 + 127124\, bc^4u\, v^3 + 576\, bc^4v^4 +$$
$$+ 12490\, bc^3u^5 + 313974\, bc^3u^4v + 1136958\, bc^3u^3v^2 +$$
$$+ 888112\, bc^3u^2v^3 + 119703\, bc^3u\, v^4 + 56\, bc^3v^5 + 50050\, bc^2u^5v + 472225\, bc^2u^4v^2 +$$
$$+ 853031\, bc^2u^3v^3 + 313098\, bc^2u^2v^4 + 13066\, bc^2u\, v^5 + 30610\, bcu^5v^2 + 132775\, bcu^4v^3 +$$
$$+ 109711\, bcu^3v^4 + 6112\, bcu^2v^5 + 2744\, bu^5v^3 + 10550\, bu^4v^4 + 4360\, bu^3v^5 + 1648\, c^5u^4 +$$
$$+ 20800\, c^5u^3v + 29880\, c^5u^2v^2 + 6920\, c^5u\, v^3 + 80\, c^5v^4 + 824\, c^4u^5 + 50000\, c^4u^4v +$$
$$+ 204356\, c^4u^3v^2 + 140520\, c^4u^2v^3 + 16538\, c^4u\, v^4 + 96\, c^4v^5 + 11312\, c^3u^5v + 169280\, c^3u^4v^2 +$$
$$+ 311556\, c^3u^3v^3 + 108024\, c^3u^2v^4 + 5020\, c^3u\, v^5 + 13064\, c^2u^5v^2 +$$
$$+ 85520\, c^2u^4v^3 + 66558\, c^2u^3v^4 + 7316\, c^2u^2v^5 + 1600\, cu^5v^3 + 2696\, cu^4v^4 - 2176\, cu^3v^5 +$$
$$+ 16\, u^5v^4 + 64\, u^4v^5 + 160\, b^5cu^2 + 440\, b^5cu\, v + 1752\, b^5cv^2 + 640\, b^5u^3 + 3200\, b^5u^2v +$$
$$+ 34320\, b^5u\, v^2 + 6656\, b^5v^3 + 992\, b^4c^2u^2 + 11640\, b^4c^2u\, v + 7720\, b^4c^2v^2 - 1104\, b^4cu^3 +$$
$$+ 95364\, b^4cu^2v + 167440\, b^4cu\, v^2 + 43154\, b^4cv^3 + 3344\, b^4u^4 + 27840\, b^4u^3v + 230648\, b^4u^2v^2 +$$
$$+ 148256\, b^4u\, v^3 + 17276\, b^4v^4 + 8504\, b^3c^3u^2 + 33032\, b^3c^3u\, v + 15584\, b^3c^3v^2 +$$
$$+ 29270\, b^3c^2u^3 + 295634\, b^3c^2u^2v + 382048\, b^3c^2u\, v^2 + 89102\, b^3c^2v^3 + 11830\, b^3cu^4 +$$
$$+ 349472\, b^3cu^3v + 951866\, b^3cu^2v^2 + 583838\, b^3cu\, v^3 + 67125\, b^3cv^4 + 208\, b^3u^5 + 5272\, b^3u^4v +$$
$$+ 252216\, b^3u^3v^2 + 357968\, b^3u^2v^3 + 97348\, b^3u\, v^4 + 2984\, b^3v^5 + 18184\, b^2c^4u^2 +$$
$$+ 32952\, b^2c^4u\, v + 11456\, b^2c^4v^2 + 91364\, b^2c^3u^3 + 381610\, b^2c^3u^2v + 371564\, b^2c^3u\, v^2 +$$
$$+ 75860\, b^2c^3v^3 + 69703\, b^2c^2u^4 + 723064\, b^2c^2u^3v + 1481244\, b^2c^2u^2v^2 +$$
$$+ 761278\, b^2c^2u\, v^3 + 77365\, b^2c^2v^4 + 56\, b^2cu^5 + 165672\, b^2cu^4v + 814887\, b^2cu^3v^2 +$$
$$+ 879223\, b^2cu^2v^3 + 219325\, b^2cu\, v^4 + 7808\, b^2cv^5 - 2688\, b^2u^5v + 49480\, b^2u^4v^2 +$$
$$+ 188988\, b^2u^3v^3 + 99330\, b^2u^2v^4 + 4720\, b^2u\, v^5 + 9312\, bc^5u^2 + 13520\, bc^5u\, v + 640\, bc^5v^2 +$$
$$+ 60158\, bc^4u^3 + 231544\, bc^4u^2v + 118836\, bc^4u\, v^2 + 24\, bc^4v^3 + 67047\, bc^3u^4 + 567968\, bc^3u^3v +$$
$$+ 881450\, bc^3u^2v^2 + 251372\, bc^3u\, v^3 + 2098\, bc^3v^4 + 12230\, bc^2u^5 + 241939\, bc^2u^4v +$$
$$+ 867313\, bc^2u^3v^2 + 689325\, bc^2u^2v^3 + 94314\, bc^2u\, v^4 - 460\, bc^2v^5 + 16382\, bcu^5v + 137635\, bcu^4v^2 +$$
$$+ 258103\, bcu^3v^3 + 74455\, bcu^2v^4 - 1000\, bcu\, v^5 + 2484\, bu^5v^2 + 10404\, bu^4v^3 + 23374\, bu^3v^4 +$$
$$+ 1840\, bu^2v^5 + 4160\, c^5u^3 + 14940\, c^5u^2v + 6920\, c^5u\, v^2 + 160\, c^5v^3 + 10424\, c^4u^4 +$$
$$+ 102584\, c^4u^3v + 139040\, c^4u^2v^2 + 32592\, c^4u\, v^3 + 488\, c^4v^4 + 2936\, c^3u^5 + 90304\, c^3u^4v +$$
$$+ 321104\, c^3u^3v^2 + 232344\, c^3u^2v^3 + 29350\, c^3u\, v^4 + 208\, c^3v^5 + 9520\, c^2u^5v +$$
$$+ 91560\, c^2u^4v^2 + 156528\, c^2u^3v^3 + 56104\, c^2u^2v^4 + 1956\, c^2u\, v^5 + 4216\, cu^5v^2 +$$
$$+ 9136\, cu^4v^3 + 1566\, cu^3v^4 - 2208\, cu^2v^5 + 80\, u^5v^3 - 400\, u^4v^4 + 128\, u^3v^5 + 80\, b^5cu +$$
$$+ 88\, b^5cv + 640\, b^5u^2 + 1600\, b^5u\, v + 6864\, b^5v^2 + 488\, b^4c^2u + 1696\, b^4c^2v + 24\, b^4cu^2 +$$
$$+ 38336\, b^4cu\, v + 30854\, b^4cv^2 + 11456\, b^4u^3 + 51680\, b^4u^2v + 118592\, b^4u\, v^2 + 31392\, b^4v^3 +$$
$$+ 2256\, b^3c^3u + 4632\, b^3c^3v + 13766\, b^3c^2u^2 + 114006\, b^3c^2u\, v + 62974\, b^3c^2v^2 + 50480\, b^3cu^3 +$$
$$+ 373734\, b^3cu^2v + 479030\, b^3cu\, v^2 + 113331\, b^3cv^3 + 4632\, b^3u^4 + 62560\, b^3u^3v + 274620\, b^3u^2v^2 +$$
$$+ 178304\, b^3u\, v^3 + 16450\, b^3v^4 + 4552\, b^2c^4u + 3344\, b^2c^4v + 53326\, b^2c^3u^2 +$$
$$+ 119436\, b^2c^3u\, v + 50480\, b^2c^3v^2 + 126601\, b^2c^2u^3 + 672864\, b^2c^2u^2v + 668892\, b^2c^2u\, v^2 +$$
$$+ 134263\, b^2c^2v^3 + 16520\, b^2cu^4 + 365993\, b^2cu^3v + 851223\, b^2cu^2v^2 + 424413\, b^2cu\, v^3 +$$

$$+ 40655\, b^2cv^4 + 96\, b^2u^5 + 6448\, b^2u^4v + 139426\, b^2u^3v^2 + 199460\, b^2u^2v^3 + 33854\, b^2u\,v^4+$$
$$+ 104\, b^2v^5 + 2704\, bc^5u + 320\, bc^5v + 45044\, bc^4u^2 + 55274\, bc^4u\,v - 1104\, bc^4v^2 + 113175\, bc^3u^3+$$
$$+ 445148\, bc^3u^2v + 283218\, bc^3u\,v^2 + 13766\, bc^3v^3 + 48449\, bc^2u^4 + 451827\, bc^2u^3v + 797535\, bc^2u^2v^2+$$
$$+ 291287\, bc^2u\,v^3 + 9392\, bc^2v^4 + 228\, bcu^5 + 63765\, bcu^4v + 326199\, bcu^3v^2 + 278025\, bcu^2v^3+$$
$$+ 38379\, bcu\,v^4 - 336\, bcv^5 - 336\, bu^5v + 1566\, bu^4v^2 + 48788\, bu^3v^3 + 19310\, bu^2v^4 + 200\, bu\,v^5+$$
$$+ 2988\, c^5u^2 + 3460\, c^5u\,v + 160\, c^5v^2 + 20598\, c^4u^3 + 68780\, c^4u^2v + 32108\, c^4u\,v^2+$$
$$+ 992\, c^4v^3 + 19192\, c^3u^4 + 167036\, c^3u^3v + 258528\, c^3u^2v^2 + 74380\, c^3u\,v^3 + 2256\, c^3v^4+$$
$$+ 2576\, c^2u^5 + 48176\, c^2u^4v + 185498\, c^2u^3v^2 + 169060\, c^2u^2v^3 + 25330\, c^2u\,v^4 + 192\, c^2v^5+$$
$$+ 2768\, cu^5v + 14456\, cu^4v^2 + 37520\, cu^3v^3 + 10404\, cu^2v^4 - 384\, cu\,v^5 + 128\, u^5v^2 - 2288\, u^4v^3+$$
$$+ 2356\, u^3v^4 + 80\, u^2v^5 + 16\, b^5c + 320\, b^5u + 320\, b^5v + 96\, b^4c^2 + 576\, b^4cu + 5798\, b^4cv+$$
$$+ 16224\, b^4u^2 + 37760\, b^4u\,v + 24372\, b^4v^2 + 208\, b^3c^3 + 2098\, b^3c^2u + 16520\, b^3c^2v + 75860\, b^3cu^2+$$
$$+ 209370\, b^3cu\,v + 97153\, b^3cv^2 + 15584\, b^3u^3 + 110128\, b^3u^2v + 153684\, b^3u\,v^2+$$
$$+ 34056\, b^3v^3 + 192\, b^2c^4 + 9392\, b^2c^3u + 11830\, b^2c^3v + 134263\, b^2c^2u^2 + 329550\, b^2c^2u\,v+$$
$$+ 126601\, b^2c^2v^2 + 62974\, b^2cu^3 + 446321\, b^2cu^2v + 474225\, b^2cu\,v^2 + 91465\, b^2cv^3+$$
$$+ 1696\, b^2u^4 + 62456\, b^2u^3v + 198850\, b^2u^2v^2 + 92796\, b^2u\,v^3 + 3114\, b^2v^4 + 64\, bc^5+$$
$$+ 10226\, bc^4u - 1116\, bc^4v + 91465\, bc^3u^2 + 167472\, bc^3u\,v + 29270\, bc^3v^2 + 97153\, bc^2u^3 + 473427\, bc^2u^2v+$$
$$+ 419021\, bc^2u\,v^2 + 53326\, bc^2v^3 + 5798\, bcu^4 + 188365\, bcu^3v + 426147\, bcu^2v^2 + 180067\, bcu\,v^3 + 10226\, bcv^4+$$
$$+ 16\, bu^5 + 2696\, bu^4v + 54622\, bu^3v^2 + 66096\, bu^2v^3 + 6470\, bu\,v^4 + 16\, bv^5 + 692\, c^5u + 80\, c^5v+$$
$$+ 13608\, c^4u^2 + 15812\, c^4u\,v + 1008\, c^4v^2 + 35046\, c^3u^3 + 147300\, c^3u^2v + 97240\, c^3u\,v^2+$$
$$+ 8504\, c^3v^3 + 9936\, c^2u^4 + 107964\, c^2u^3v + 230464\, c^2u^2v^2 + 91964\, c^2u\,v^3 + 4552\, c^2v^4+$$
$$+ 64\, cu^5 + 7952\, cu^4v + 72390\, cu^3v^2 + 68716\, cu^2v^3 + 10550\, cu\,v^4 + 64\, cv^5 + 64\, u^5v - 2304\, u^4v^2+$$
$$+ 9604\, u^3v^3 + 2664\, u^2v^4 + 16\, u\,v^5 + 64\, b^5 + 228\, b^4c + 10496\, b^4u + 9936\, b^4v + 56\, b^3c^2+$$
$$+ 49900\, b^3cu + 48449\, b^3cv + 21040\, b^3u^2 + 76624\, b^3u\,v + 35046\, b^3v^2 - 460\, b^2c^3 + 77365\, b^2c^2u+$$
$$+ 69703\, b^2c^2v + 89102\, b^2cu^2 + 276971\, b^2cu\,v + 113175\, b^2cv^2 + 7720\, b^2u^3 + 105240\, b^2u^2v+$$
$$+ 117542\, b^2u\,v^2 + 13608\, b^2v^3 - 336\, bc^4 + 40655\, bc^3u + 25354\, bc^3v + 113331\, bc^2u^2 + 276107\, bc^2u\,v+$$
$$+91364\, bc^2v^2+30854\, bcu^3+259619\, bcu^2v+267131\, bcu\,v^2+45044\, bcv^3+88\, bu^4+32200\, bu^3v+92170\, bu^2v^2+$$
$$+ 27956\, bu\,v^3 + 692\, bv^4 + 16\, c^5 + 3114\, c^4u + 512\, c^4v + 34056\, c^3u^2 + 63640\, c^3u\,v + 14056\, c^3v^2+$$
$$+ 24372\, c^2u^3 + 141584\, c^2u^2v + 133038\, c^2u\,v^2 + 18184\, c^2v^3 + 320\, cu^4 + 45476\, cu^3v + 103528\, cu^2v^2+$$
$$+ 44644\, cu\,v^3 + 2704\, cv^4 + 320\, u^4v + 14240\, u^3v^2 + 11360\, u^2v^3 + 692\, u\,v^4 + 2576\, b^4 + 12230\, b^3c+$$
$$+ 12816\, b^3u + 19192\, b^3v + 18034\, b^2c^2 + 55082\, b^2cu + 67047\, b^2cv + 11560\, b^2u^2 + 62344\, b^2u\,v+$$
$$+ 20598\, b^2v^2 + 7808\, bc^3 + 67125\, bc^2u + 62618\, bc^2v + 43154\, bcu^2 + 147609\, bcu\,v + 60158\, bcv^2 + 1752\, bu^3+$$
$$+ 46248\, bu^2v + 40790\, bu\,v^2 + 2988\, bv^3 + 104\, c^4 + 16450\, c^3u + 10584\, c^3v + 31392\, c^2u^2 + 81724\, c^2u\,v+$$
$$+ 26776\, c^2v^2 + 6864\, cu^3 + 54080\, cu^2v + 55146\, cu\,v^2 + 9312\, cv^3 + 6864\, u^3v + 16032\, u^2v^2 + 2988\, u\,v^3+$$
$$+2936\, b^3+12490\, b^2c+6264\, b^2u+10424\, b^2v+14728\, bc^2+21166\, bcu+28972\, bcv+2504\, bu^2+18728\, bu\,v+4160\, bv^2+$$
$$+ 2984\, c^3 + 17276\, c^2u + 16248\, c^2v + 6656\, cu^2 + 23084\, cu\,v + 9968\, cv^2 + 6656\, u^2v + 4160\, u\,v^2 + 824\, b^2+$$
$$+ 3296\, bc + 824\, bu + 1648\, bv + 3296\, c^2 + 1648\, cu + 3296\, cv + 1648\, u\,v$$

Функция $f = s/Sf = 51S - 100s$ была исследована на минимум с помощью пакета maple. Минимум функции 0 достигается при $c = 0$, $b = 0$, $u = 0$, $v = 0$ и мы получаем искомое неравенство.

Теорема доказана.

Замечание. В случае выпуклого n – угольника
$ABCDE\ldots$ при $n > 5$ нельзя усилить очевидное неравенство $s < S$. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть случай вырождения n–угольника в треугольник при $A = B$, $C = D$,

$E = F = G\dots$, когда достигается равенство: $s = S$ (поскольку оба треугольника, в которые вырождаются n-угольники $ABCDE\dots$ и $A_1B_1C_1D_1E_1\dots$, совпадают, как легко видеть).

Библиографический список

1. Шклярский, Д.О. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии/ Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – М. : Наука, 1974.
2. Никоноров, Ю.Г. Обобщенная задача Поповичи / Ю.Г. Никоноров, Ю.В. Никонорова // Труды Рубцовского индустриального института: Выпуск 7: Гуманитарные, естественные науки. – Рубцовск : РИИ, 2000. – С. 229–232.