УДК 511

И.В. Поликанова

ОТОБРАЖЕНИЯ, ОДНОРОДНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЙ ГРУППЫ

Аннотация. В работе дается определение однородного относительно действий группы отображения, приводятся примеры таких отображений.

Ключевые слова: *однородное отображение, действие группы на множестве.*

I.V. Polikanova

MAPS WHICH ARE HOMOGENEOUS RESPECT TO ACTIONS OF THE GROUP

Abstract. The paper gives a definition of the map, which is homogeneous with respect to actions of the group.

Key words: *homogeneous map, action of the group on the set.*

Обозначения для множеств чисел:
N – натуральных; Z – целых; R – действительных; R^+ – положительных действительных; R^- – отрицательных действительных; $R^* = R^- \cup R^+$.

На множестве X задано *действие мультипликативной группы* G, если задано отображение $\theta : G \times X \to X$ такое, что в обозначениях $\theta(g, x) = g * x$ справедливо:

1) $(gh) * x = g * (h * x)$,
2) $e * x = x$, где e – единица группы G.

Будем говорить, что *группа G действует на множестве Y коммутативно*, если для любых $g, h \in G$, $y \in Y$ справедливо: $(gh) * y = (hg) * y$.

Очевидно, что коммутативная группа всегда определяет коммутативное действие. Однако некоммутативная группа также может определять коммутативные действия. Например, полная линейная группа GL_k преобразований k-мерного векторного пространства V^k допускает 2 вида действий на R^* ([1], с. 216): для матрицы $A \in GL_k$, $\lambda \in R$,

$$A *_\lambda t = |\det A|^\lambda\, t, \qquad (1)$$

$$A \bullet_\lambda t = \delta_A\, |\det A|^\lambda\, t, \qquad (2)$$

где $\delta_A = 1$ при $\det A > 0$, и $\delta_A = -1$, если $\det A < 0$.

Действительно:

$AB *_\lambda t = |\det AB|^\lambda t = (|\det A|\,|\det B|)^\lambda t = (|\det A|^\lambda |\det B|^\lambda) t = |\det A|^\lambda (|\det B|^\lambda t) = A *_\lambda (B *_\lambda t)$.

Для формулы (2) условие 1) действия проверяется аналогично, если учесть, что $\delta_{AB} = \delta_A \delta_B$. Для единичной матрицы E имеем

$E *_\lambda t = E \bullet_\lambda t = |\det E|^\lambda\, t = 1 \cdot t = t$. Проверили, что формулы (1), (2) определяют действия.

Очевидно эти действия коммутативны, хотя группа GL_k некоммутативна.

Кроме того, всякая группа G допускает *тривиальное действие* на любом множестве:

$g * y = y$ для любых $g \in G$, $y \in Y$,

также коммутативное.

Предложение 1. Если группа G действует на множестве Y коммутативно, то

$$(gh)^n * y = (g^n h^n) * y$$

для любых $g, h \in G$, $y \in Y$, $n \in Z$.

Доказательство. Докажем утверждение методом математической индукции сначала для натуральных степеней n. При $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для степени $n - 1 \in N$, т.е.

$$(gh)^{n-1} * y = (g^{n-1} h^{n-1}) * y$$

для любых $g, h \in G, y \in Y$. Принимая во внимание коммутативность действия группы G на Y, получим: $(gh)^n * y = [(gh)^{n-1} gh] * y = (gh)^{n-1} * [(gh) * y] = (gh)^{n-1} * [(hg) * y] = [(gh)^{n-1}(hg)] * y = [(g^{n-1}h^{n-1})(hg)] * y = [(g^{n-1}h^n)g] * y = [g(g^{n-1}h^n)] * y = (g^n h^n) * y$.

Таким образом, формула верна и для степени n, а значит, для всех натуральных степеней. Теперь докажем равенство

$$(gh)^{-n} * y = (g^{-n} h^{-n}) * y$$

для всех натуральных n и нуля. При $n = 0$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для степени $n - 1 \in N$, т.е.

$$(gh)^{1-n} * y = (g^{1-n} h^{1-n}) * y$$

для любых $g, h \in G, y \in Y$. В силу коммутативности действия группы G на Y имеем: $(gh)^{-n} * y = [(gh)^{1-n}(gh)^{-1}] * y = (gh)^{1-n} * [(gh)^{-1} * y] = (g^{1-n}h^{1-n}) * [(gh)^{-1} * y] = [g^{1-n}h^{1-n}(gh)^{-1}] * y = (g^{1-n}h^{1-n}h^{-1}g^{-1}) * y = [(g^{1-n}h^{-n})g^{-1}] * y = [g^{-1}(g^{1-n}h^{-n})] * y = (g^{-n}h^{-n}) * y$.

Формула верна и для $n \in N$. Предложение доказано полностью.

Предложение 2. Если группа G действует на множестве X коммутативно, то для всякого $n \in Z$ формула

$$g *_n x = g^n * x \tag{3}$$

также определяет действие на X.

Доказательство. $g *_n (h *_n x) = g^n * (h^n * x) = (g^n h^n) * x = (gh)^n * x = (gh) *_n x$,

$e *_n x = e^n * x = e * x = x$.

При доказательстве мы воспользовались предложением 1.

Пусть определены действия группы G на множествах X и Y, обозначаемые соответственно $\circ$ и $*$. Отображение $f : X \to Y$ назовем *однородным степени n относительно действий группы G* на множествах X и Y, если

$$(\forall g \in G)(\forall x \in X)(\ f(g \circ x) = g^n * f(x)\ ). \tag{4}$$

Здесь $n \in Z$, а в некоторых случаях $n \in R$. При $n = 1$ условие (4) определяет *эквивариантное отображение* или *комитант*.

Примеры.

1. Пусть $f : R^n \to R$ – функция. Если действия группы R^* на R^n и R определены формулами: $t \circ x = tx$, $t * y = ty$ для $t \in R^*$, $x \in R^n$ и $y \in R$, то условие (4) приводит к известному понятию *однородной функции*. Определив аналогично действия группы R^+ на R^n и R, получим понятие *положительно однородной функции* ([2], с.1174).

2. *Инвариантом группы G*, действующей на X, называется отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее условию

$$(\forall g \in G)(\forall x \in X)(\ f(g \circ x) = f(x)\ )$$

([3], с. 526). Может рассматриваться как однородное отображение любой степени относительно действий группы G, если действие $*$ тривиально.

3. Понятие комитанта и инварианта восходит к классической теории инвариантов, в которой $G = GL_k$, а X, Y – пространства тензоров, на которых G действует естественным образом, f – эквивариантное полиноминальное отображение X в Y ([3], с. 980).

Отображение $f : \prod V^k \to R^*$, называется ([2], с. 216 -218):

1) *инвариантом*, если

$$f(Ax) = f(x),$$

2) *осевым* или *аксиальным инвариантом*, если

$$f(Ax) = \delta_A f(x),$$

3) *псевдоинвариантом веса* λ, $\lambda \in R$, если

$$f(Ax) = |\det A|^\lambda f(x),$$

4) *осевым псевдоинвариантом веса* λ, $\lambda \in R$, если

$$f(Ax) = \delta_A |\det A|^\lambda f(x),$$

для всех $x \in \prod V^k$ и всех $A \in GL_k$, Ax – произведение матрицы A на каждую компоненту мультивектора x.

Как видим, эти понятия соответствуют понятиям однородных отображений степени 1 относительно действий группы GL_k на R^*, определенных так: $A \circ x = Ax$, а $A * x = A *_\lambda x$ в первом $(\lambda = 0)$ и третьем $(\lambda \neq 0)$ случаях и $A * x = A \bullet_\lambda x$ во втором $(\lambda = 0)$ и четвертом $(\lambda \neq 0)$ случаях.

Псевдоинвариант веса $n \in N$ может рассматриваться и как однородное отображение степени n, если группа GL_k действует на R^* посредством отображения $*_1$, определенного формулой (1). Действительно, $A *_n f(x) = |\det A|^n f(x) = |\det A^n|\, f(x) = A^n *_1 f(x)$.

4. Обобщением последнего замечания служит следующий факт: если действия группы G на множествах X и Y обозначены соответственно $\circ$ и $*$, и группа G действует на X коммутативно, то из эквивариантности отображения $f : X \to Y$, следует его однороность степени n относительно действия $\circ_n$ на X и прежнего действия группы G на Y :

$(\forall g \in G)(\forall x \in X)(f(g \circ x) = g * f(x)) \Rightarrow$
$(\forall g \in G)(\forall x \in X)(f(g \circ_n x) = g^n * f(x))$.

И наоборот, если отображение $f : X \to Y$ однородно степени n относительно действий $\circ$ и $*$ группы G на X и Y соответственно, причем действие группы G на Y коммутативно, то оно эквивариантно относительно действий $\circ$ и $*_n$ группы G на X и Y :

$(\forall g \in G)(\forall x \in X)(f(g \circ x) = g^n * f(x)) \Rightarrow$
$(\forall g \in G)(\forall x \in X)(f(g \circ x) = g *_n f(x))$.

5. Пусть φ - гомоморфизм группы G_1 в группу G_2. Отображения

$g \circ x = gx,\ g \in G_1,\ x \in G_1,$
$g * y = \varphi(g)y, \quad g \in G_1,\ y \in G_2,$

определяют действия группы G_1 на G_1 и G_2, относительно которых отображение φ является однородным степени 1:

$$\varphi(g \circ x) = \varphi(gx) = \varphi(g)\varphi(x) = g * \varphi(x).$$

6. Пусть группа G действует сама на себе внутренними автоморфизмами:

$$g * x = gxg^{-1},\ x, g \in G.$$

Тогда отображения $\varphi_n : G \to G$, определенные формулой $\varphi_n(x) = x^n$, $n \in Z$, являются однородными степени 1 относительно действия группы G. Действительно: $\varphi_n(g * x) = \varphi_n(gxg^{-1}) = (gxg^{-1})^n = gx^n g^{-1} = g * \varphi_n(x)$.

7. Если коммутативная группа G действует сама на себе правыми сдвигами $g * x = gx$, совпадающими (ввиду коммутативности G) с левыми сдвигами $g * x = xg$, то относительно этого действия в обоих случаях на G отображение $\varphi_n(x) = x^n$ является однородным степени n. В самом деле: $\varphi_n(g*x) = \varphi_n(gx) = (gx)^n = g^n x^n = g^n * \varphi_n(x)$.

8. Если группа G (необязательно коммутативная) действует сама на себе двояко – левыми сдвигами $g *_l x = gx$ и правыми сдвигами $g *_r x = xg$, то относительно этих действий, рассматриваемых в любом порядке, отображение $\varphi_{-1}(x) = x^{-1}$ является однородным степени -1. Убедимся в этом: $\varphi_{-1}(g *_l x) = \varphi_{-1}(gx) = (gx)^{-1} = x^{-1}g^{-1} = g^{-1} *_r \varphi_{-1}(x)$. Аналогично проверяется, что $\varphi_{-1}(g *_r x) = g^{-1} *_l \varphi_{-1}(x)$.

Библиографический список

1. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М. : Наука, 1970. – 528 с.
2. Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1982. – Т. 3 (Коо-Од.). – 1184 с. : ил.
3. Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2 (Д-Коо.). – 1104 с. : ил.