С.И. Янов

О СКОРОСТЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ НА ДНЕ

В работе исследуется скорость вращающейся жидкости при малых колебаниях давления на дне. Выделен класс возмущений, при которых компоненты скорости либо осциллируют при возрастании времени, либо, начиная с некоторого момента, монотонно стремятся к нулю и суммируемы по времени.

Ключевые слова: система Соболева, начально-краевая задача, поведение скоростей.

S.I. Yanov

ON THE SPEEDS OF THE ROTATING FLUID BY SMALL OSCILLATION ON THE GROUND

In paper study the behavior of the speed rotating fluid by small oscillation tension on the Ground. Established the Grade of the oscillation, by which the Speeds regarded as a function of t on $(0,\infty)$, is oscillates to t, or summable on $(0,\infty)$ and tends monotonically to 0 as $t \to \infty$.

Key words: Sobolev system, mixed boundary value problem, the behavior of the speeds.

В работе исследуется поведение скоростей решения первой начально-краевой задачи для системы Соболева [1] (описывающей малые колебания вращающейся жидкости):

$$\vec{V}_t - [\vec{V},\vec{\omega}] + \mathrm{grad}P = 0,$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3^+,\ t > 0,$$
$$div\vec{V} = 0, \qquad (1)$$
$$\vec{V}|_{t=0} = 0, P|_{x_3=0} = g(t,x),$$

где $\vec{\omega} = (0,0,1), x' = (x_1,x_2)$.

Изучению решения задачи (1) посвящены работы [1–8]. Однако полученные результаты касались в основном поведения давления P решения задачи (1), а качественное поведение скорости $\vec{V}$ не было описано.

Пусть

$$L_{t\to\gamma}(f(t)) = \int_0^\infty \exp(-\gamma t)f(t)dt, 0 < \gamma < \delta\ -$$

преобразование Лапласа,

$$F_{x'\to\xi'}f(x') = \frac{1}{2\pi}\int_{R_2} \exp(-ix'\xi')g(x')dx'\ -$$

преобразование Фурье,

$$F^{-1}_{\xi'\to x'}h(\xi') = \frac{1}{2\pi}\int_{R_2} \exp(i\xi'x')h(\xi')d\xi'\ -$$

обратное преобразование Фурье. В работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\forall t \geq 0$ $g(t,x') \in C_0^\infty(R_2)$, $\forall t \geq 0$ $\mathrm{supp}\, g(t,x') \subset \omega_R = \{x' \in R_2 : |x'| \leq R\}$, *для некоторого* $N \geq 0$

$$|D_t^i D_{x'}^\beta g(t,x')| \leq Ct^N + C_o, 0 \leq i \leq k.$$

Тогда, если

$$|L_{t\to\gamma}D_{z_1}g(t,z')| \leq C, |L_{t\to\gamma}D_{z_2}g(t,z')| \leq C,$$
$$|L_{t\to\gamma}g(t,z')| \leq C\gamma, 0 < \gamma < \delta, \qquad (*)$$

то компоненты скорости $V_1(t,x)$, $V_2(t,x)$, $V_3(t,x)$, *либо осциллируют при возрастании времени* $t \in [0,\infty)$, *либо суммируемы по времени и не меняют своего знака в некоторой окрестности* ∞.

Замечание. *Условию (*) удовлетворяют некоторые функции, осциллирующие по времени, например,*

$$g(t,z') = h(z')\cos t,$$

некоторые финитные по времени, например

$$g(t,z') = h(z')f(t),$$
$$f(t) = \sin t, t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$
$$f(t) = 0, t \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\ -$$

некоторые функции являющиеся произведением возмущений с разными частотами по времени, к примеру

$$g(t,z') = h(z')\sin(at)\sin(bt),\ a \neq b.$$

Доказательство. С. Л. Соболевым доказано [1], что компонента давления P решения задачи (1) удовлетворяет уравнению

$$D_t^2 \Delta P + D_{x_3}^2 P = 0.$$

Кроме того доказано, что эта компонента удовлетворяет следующим начально-краевым условиям (см., например, [7, § 3.3, п. 3]):

$$P|_{t=0} = 0,\ D_t P|_{t=o} = 0,\ P|_{x_3=0} = g(t, x'). \quad (2)$$

Также хорошо известно [7, § 3.2], что решение $P(t, x)$ задачи (2) существует и единственно, причем имеет место следующее представление:

$$P(t,x) = q\int\limits_{R_2} \frac{x_3}{r^3} D_t^2 \int\limits_0^t (t-\tau) I_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)) g(\tau, y') d\tau dy' + q\int\limits_{R_2} \frac{x_3}{r^3} \int\limits_0^t (t-\tau) I_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)) g(\tau, y') d\tau dy', \quad (3)$$

где $I_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $r = \sqrt{x_3^2 + \rho^2}$, $\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $q = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2})}$, $\Gamma(\frac{3}{2})$ – значение гамма-функции в точке $\frac{3}{2}$. Выполняя в (3) преобразование $y' - x' = z'$ и дифференцируя, получим

$$D_{x'}^\beta P(t,x) = q\int\limits_{R_2} \frac{x_3}{r^3} D_t^2 \int\limits_0^t (t-\tau) I_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)) D_{x'}^\beta g(\tau, z' + x') d\tau dz' +$$

$$+ q\int\limits_{R_2} \frac{x_3}{r^3} \int\limits_0^t (t-\tau) I_0(\frac{\rho}{r}(t-\tau)) D_{x'}^\beta g(\tau, z' + x') d\tau dz'.$$

Дальнейшее исследование величины давления $P(t, x)$ будем проводить аналогично тому, как это сделано в работе [7, § 3.2, п.4], а именно:

$$L_{t\to\gamma} D_{x'}^\beta P(t,x) = q \times \int_{R_2} \frac{x_3 \gamma^3}{r^3(\gamma^2 + (\rho/r)^2)^{3/2}} L_{t\to\gamma} D_{z'}^\beta g(t, z' + x') dz' +$$

$$+ q\int_{R_2} \frac{x_3 \gamma}{r^3(\gamma^2 + (\rho/r)^2)^{3/2}} L_{t\to\gamma} D_{z'}^\beta g(t, z' + x') dz' = I_1 + I_2.$$

Оценим I_2. Учитывая финитность $g(t, z')$ и то, что $\operatorname{supp} g(t, z') \subset \omega_R$, получаем, что

$$|I_2| \le C \max_{z'} |L_{t\to\gamma} D_{z'}^\beta g| \int\limits_{\omega_R} \frac{x_3\gamma}{r^3(\gamma^2 + (\rho/r)^2)^{3/2}} dz'.$$

Выполняя замену $z' + x' = y'$, обозначая ω_R' область, полученную из ω_R при сдвиге на x', будем иметь следующую оценку:

$$|I_2| \le C \max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y'}^\beta g| \int\limits_{\omega_R'} \frac{x_3 \gamma dy'}{(x_3^2\gamma^2 + (1+\gamma^2)\rho^2)^{3/2}}.$$

считая, что $\omega_R' \subset \{z' \in R_2 : |z'| \le R\}$, переходя в полярную систему координат, получаем

$$C \max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y'}^\beta g| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \frac{x_3\gamma\rho d\rho d\phi}{(x_3^2\gamma^2 + (1+\gamma^2)\rho^2)^{3/2}} \le C_1 \max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y'}^\beta g(t, y')|.$$

Оценка I_1 проводится аналогично. Таким образом,

$$|L_{t\to\gamma} D_{x'}^\beta P(t,x)| \le C_2 \max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y'}^\beta g(t, y')|.$$

Оценим $L_{t\to\gamma} D_{x_3} P(t, x)$. Если обозначить $\frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} = s$, то из [7, § 3.2, п. 3]

$$L_{t\to\gamma} F_{x'\to\xi'} P = \exp(s|\xi'|x_3) L_{t\to\gamma} F_{x'\to\xi'} g.$$

Отсюда $L_{t\to\gamma}D_{x_3}P = F^{-1}_{\xi'\to x'}s|\xi'|\exp(s|\xi'|x_3)\times \times F_{y'\to\xi'}L_{t\to\gamma}g = \frac{s}{(2\pi)^2}\int\limits_{R_2}\int\limits_{R_2}\exp(i(x'-y')\xi'+ +s|\xi'|x_3)|\xi'|L_{t\to\gamma}gdy'd\xi'$.

Перейдем в полярную систему координат, после чего внесем экспоненту под знак дифференциала. В результате получим следующую цепочку равенств:

$$L_{t\to\gamma}D_{x_3}P = \frac{s}{(2\pi)^2}\int\limits_{R_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp((i|x'-y'|\cos\phi + sx_3)r)r^2drd\phi L_{t\to\gamma}gdy' =$$

$$= \frac{s}{(2\pi)^2}\int\limits_{R_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} r^2 d(\frac{\exp((i|x'-y'|\cos\phi + sx_3)r)}{i|x'-y'|\cos\phi + sx_3})d\phi L_{t\to\gamma}gdy'.$$

Проинтегрировав дважды по частям, получим

$$L_{t\to\gamma}D_{x_3}P =$$
$$= \frac{-s}{2\pi^2}\int\limits_{R_2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\phi}{(i|x'-y'|\cos\phi + sx_3)^3}L_{t\to\gamma}gdy'$$

Обозначая далее $-\frac{sx_3}{|x'-y'|} = a$, получим, что величина $L_{t\to\gamma}D_{x_3}P$ будет равна

$$\frac{-s}{2\pi^2}\int\limits_{R_2}\frac{1}{|x'-y'|^3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{i}{(\cos\phi + ia)^3}d\phi L_{t\to\gamma}gdy'.$$

Внутренний интеграл I вычислим с помощью интеграла по замкнутому контуру от функции комплексного переменного. Обозначая $\exp(i\phi) = z$, $\cos\phi = (z+1/z)/2$, $d\phi = -i\,dz/z$, получаем

$$I = \int_{|z|=1}\frac{dz}{z((z+1/z)/2+ia)^3} =$$
$$= \int_{|z|=1}\frac{8z^2dz}{(z^2+2iaz+1)^3}.$$

Корень $z_1 = -i(a-\sqrt{a^2+1})$ – полюс третьего порядка подинтегральной функции. Тогда интеграл I можно вычислить с помощью теории вычетов:

$$I = 2\pi i \lim_{z\to -i(a-\sqrt{a^2+1})} D_z^2\frac{8z^2}{(z-(-i(a+\sqrt{a^2+1})))^3} = \frac{2\pi(1-2a^2)}{(a^2+1)^{5/2}}.$$

Отсюда получаем

$$L_{t\to\gamma}D_{x_3}P =$$
$$\frac{-s}{\pi}\int_{R_2}\frac{1-2a^2}{|x'-y'|^3(a^2+1)^{5/2}}L_{t\to\gamma}gdy'.$$

Подставляя значение a и выполняя преобразования, будем иметь

$$L_{t\to\gamma}D_{x_3}P =$$
$$= \frac{-s}{\pi}\int_{R_2}\frac{|x'-y'|^2}{(s^2x_3^2+|x'-y'|)^{5/2}}L_{t\to\gamma}gdy' +$$
$$+ \frac{2s^3}{\pi}\int_{R_2}\frac{x_3^2}{(s^2x_3^2+|x'-y'|)^{5/2}}L_{t\to\gamma}gdy'.$$

Отсюда, как и ранее, получаем

$$|L_{t\to\gamma}D_{x_3}P| \le C\max_{y'}|L_{t\to\gamma}g|. \qquad (5)$$

Доказано [8, § 2.6], что для компонент скорости решения задачи (1) имеет место представление

$$V_1 = \cos t\int_0^t D_{x_2}P\sin\tau - D_{x_1}P\cos\tau d\tau -$$
$$- \sin t\int_0^t D_{x_1}P\sin\tau + D_{x_2}P\cos\tau d\tau,$$

$$V_2 = \sin t\int_0^t D_{x_1}P\cos\tau - D_{x_2}P\sin\tau d\tau \qquad (6)$$
$$- \cos t\int_0^t D_{x_1}P\sin\tau + D_{x_2}P\cos\tau d\tau,$$
$$V_3 = \int_0^t D_{x_3}Pd\tau.$$

Преобразуя выражения в (6) с помощью формул тригонометрии, будем иметь

$$V_1 = -\int_0^t\sin(t-\tau)D_{x_2}Pd\tau - \int_0^t\cos(t-\tau)D_{x_1}Pd\tau,$$

$$V_2 = -\int_0^t \cos(t-\tau) D_{x_2} P d\tau + \int_0^t \sin(t-\tau) D_{x_1} P d\tau,$$

$$V_3 = \int_0^t D_{x_3} P d\tau.$$

Используя формулу преобразования Лапласа свертки, получаем

$$|L_{t\to\gamma} V_1| \leq |L_{t\to\gamma} \sin t||L_{t\to\gamma} D_{x_2} P| + \\ + |L_{t\to\gamma} \cos t||L_{t\to\gamma} D_{x_1} P|,$$

$$|L_{t\to\gamma} V_2| \leq |L_{t\to\gamma} \cos t||L_{t\to\gamma} D_{x_2} P| + \\ + |L_{t\to\gamma} \sin t||L_{t\to\gamma} D_{x_1} P|, \quad (7)$$

$$|L_{t\to\gamma} V_3| \leq \frac{|L_{t\to\gamma} D_{x_3} P|}{\gamma}.$$

Так как

$$L_{t\to\gamma} \sin t = \frac{1}{1+\gamma^2},$$

$$L_{t\to\gamma} \cos t = \frac{\gamma}{1+\gamma^2},$$

$0 < \gamma \leq \delta$ и имеет место (4), (5), то из (7) будем иметь

$$|L_{t\to\gamma} V_1| \leq C \left(\max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y_1} g| + \right. \\ \left. + \max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y_2} g| \right),$$

$$|L_{t\to\gamma} V_2| \leq C \left(\max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y_1} g| \right. \\ \left. + \max_{y'} |L_{t\to\gamma} D_{y_2} g| \right), \quad (8)$$

$$|L_{t\to\gamma} V_3| \leq C \frac{\max_{y'} |L_{t\to\gamma} g|}{\gamma}.$$

Дальнейшее доказательство аналогично [5–7]. Воспользовавшись [7, гл. 2, § 2.1, лемма 2.1] и оценками (8), из условия доказываемой теоремы получим, что V_1, V_2, V_3 либо осциллируют при возрастании времени, $t \in [0, \infty)$, либо суммируемы по времени на $[0, \infty)$ и не меняют своего знака в некоторой окрестности ∞.

Теорема полностью доказана.

Библиографический список

1. Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – Т. 18. – № 1. – С. 3–50.
2. Масленникова, В. Н. Оценки в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы С. Л. Соболева / В. Н. Масленникова // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1968. – Т. 103. – С. 117–141.
3. Успенский, С. В. О поведении на бесконечности решений одной задачи С. Л. Соболева / С. В. Успенский, Г. В. Демиденко // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24. – № 5. – С. 199–210.
4. Успенский, С. В. О поведении на бесконечности решения одной задачи гидродинамики / С. В. Успенский, Е. Н. Васильева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1990. – Т. 192. – С. 221–230.
5. Успенский, С. В. Качественное исследование решения одной задачи С. Л. Соболева при $t \to \infty$ / С. В. Успенский, Е. Н. Васильева // Тр. Матем. ин-та РАН. – 1995. – Т. 210. – С. 274–283.
6. Успенский, С. В. О дифференциальных свойствах решения первой смешанной краевой задачи для системы Соболева / С. В. Успенский, Е. Н. Васильева, С. И. Янов // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 311–319.
7. Янов, С. И. Пространства типа Соболева–Винера и асимптотические свойства их функций / С. И. Янов. – Барнаул : Изд-во БГПУ. – 2007. – 113 с.
8. Янов, С. И. Приложения пространств типа Соболева-Винера / С. И. Янов. – Барнаул : Изд-во АлтГПА. – 2012. – 91 с.
9. Янов, С. И. О скоростях вращающейся жидкости после малых возмущений на дне / С. И. Янов. – Материалы межд. конф. «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул : Изд-во АлтГУ. – 2014.