УДК 519.224.24

С.В. Чеботарев

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УСРЕДНЕННЫХ СМЕШАННЫХ МОМЕНТОВ

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые вопросы статистического оценивания усредненных смешанных моментов и исследуются их основные свойства.

Ключевые слова: статистическое оценивание, смешанные моменты, несмещенные оценки, состоятельные оценки.

S. V. Chebotarev

STATISTICAL ESTIMATES AVERAGED MIXED MOMENTS

Abstract. This article discusses some of the issues of statistical estimation averaged mixed moments and study their basic properties.

Key words: statistical estimation, mixed moments, unbiased estimates, consistent estimates.

В ранее опубликованных автором материалах [1] показано, что усредненные смешанные моменты играют важную роль в формировании вида распределения сумм случайных величин. В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы статистического оценивания усредненных смешанных моментов и исследуются их основные свойства.

Случай бивалентных последовательностей. Пусть задана последовательность $\xi = (\xi_i)_{i \in I_n}$, $\xi_i \in \{-\theta, \theta\}$, $\mathbf{M}\xi_i = h_i$. Рассмотрим выборку объема r из этой последовательности, то есть пусть $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_r$ суть независимые, одинаково распределенные случайные вектора $\vec{X}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}) \in \{-\theta, \theta\}^n$. Обозначим через

$$S_n(i) = \sum_{j=1}^n x_{i,j}, \quad S'_n(i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{I}(x_{i,j} = \theta). \quad (1)$$

Здесь и далее $\mathbf{I}(A)$ – индикаторная функция, принимающая значение 1 в случае, когда выражение A истинно и принимающая значение 0 в противном случае.

Связь между этими величинами:

$$S_n(i) = \theta(2S'_n(i) - n).$$

Обозначим через $r_k = \sum_{i=1}^r \mathbf{I}(S'_n(i) = k\theta)$. Из Теоремы 2.2 [1] имеем

$$v_m = \theta^m \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_n(k) \cdot B_n(m, k), \quad m = 1, \dots, n.$$

$$\ddot{v}_m = \theta^m \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_n(k) \cdot \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}}, \quad m = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим следующую статистику

$$\hat{v}_m = \frac{\theta^m}{r} \sum_{k=0}^n r_k \cdot \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} \quad m = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Теорема 1. Статистика $\hat{v}_m$ является несмещенной и состоятельной оценкой для $\ddot{v}_m$, $m = 1, \dots, n$.

Доказательство. Несмещенность: $\mathbf{M}\hat{v}_m =$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\theta^m \sum_{k=0}^n \frac{r_k}{r} \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} &= \theta^m \sum_{k=0}^n \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} \mathbf{M} \frac{r_k}{r} = \\ &= \theta^m \sum_{k=0}^n \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} \mathbf{P}_n(k) = \ddot{v}_m. \end{aligned}$$

Состоятельность: на основании закона больших чисел и теоремы о непрерывности

$$\begin{aligned} \hat{v}_m &= \theta^m \sum_{k=0}^n \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} \frac{r_k}{r} \xrightarrow{\text{P}} \\ &\xrightarrow{\text{P}} \theta^m \sum_{k=0}^n \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} \mathbf{P}_n(k) = \ddot{v}_m. \end{aligned}$$

ч.т.д.

Известно (см., например, [2]), что случайный вектор $(r_0, \dots, r_n)$ имеет полиномиальное распределение, а вектор $\left(\frac{r_0 - r\mathbf{P}_n(0)}{\sqrt{r}}, \dots, \frac{r_n - r\mathbf{P}_n(n)}{\sqrt{r}}\right)$ сходится по распределению к центрированному нормальному вектору с ковариационной матрицей $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{i,j})$, где

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{P}_n(i) \cdot (1 - \mathbf{P}_n(i)), & \text{для } i = 0, \dots, n, \\ -\mathbf{P}_n(i) \cdot \mathbf{P}_n(j) & \text{для } i \neq j \end{cases}$$

Учитывая это, получаем:

Теорема 2. Случайная величина

$$\frac{\sqrt{r}}{\theta^m} \cdot (\hat{v}_m - \ddot{v}_m) \Rightarrow N_{0, \sigma_m^2},$$

где

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=0}^n \frac{B_n^2(m, i)}{n^m} \cdot \mathbf{P}_n(i) \cdot (1 - \mathbf{P}_n(i)) - 2 \sum_{0 \leq i < j} \frac{B_n(m, i)}{\sqrt{n^m}} \frac{B_n(m, j)}{\sqrt{n^m}} \mathbf{P}_n(i) \cdot \mathbf{P}_n(j)$$

или, что то же самое

$$\sigma_m^2 = \vec{\mathbf{B}}_n(m) \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \vec{\mathbf{B}}'_n(m).$$

$$\text{Здесь } \vec{\mathbf{B}}_n(m) = \left(\frac{B_n(m, 0)}{\sqrt{n^m}}, \dots, \frac{B_n(m, n)}{\sqrt{n^m}} \right).$$

$\forall m = 1, \dots, n$.

Доказательство. Имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{r}}{\theta^m} (\hat{v}_m - \ddot{v}_m) &= \sqrt{r} \left(\sum_{k=0}^n \frac{r_k}{r} \cdot \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} - \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_n(k) \cdot \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{B_n(m, k)}{\sqrt{n^m}} \cdot \frac{r_k - r \cdot \mathbf{P}_n(k)}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Откуда и следует утверждение.

Случай решетчатых случайных величин. Рассмотрим последовательность случайных величин, имеющих решетчатое распределение с конечным числом значений, то есть $\xi = (\xi_i)_{i \in I_n}$, где $\xi_i \in \{\theta(2k - t), k = 0, 1, \dots, t\}$ где θ - шаг распределения. Для таких случайных величин можно доказать аналогичный результат: По аналогии с тем, как это делалось в [1], можно свести этот случай к предыдущему. То есть последовательности $\xi = (\xi_i)_{i \in I_n}$, $\xi_i \in \{\theta(2k_i - t), k_i = 0, 1, \dots, t\}$ поставить в соответствие последовательность $\xi' = (\xi'_i)_{i \in I_{nt}}$, $\xi'_i \in \{-\theta, \theta\}$.

Рассмотрим выборку объема r из этой последовательности, то есть пусть $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_r$ суть независимые, одинаково распределенные случайные вектора $\vec{X}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$, где $x_{i,j} = \theta(2k_{i,j} - t) \in \{\theta(2k - t), k = 0, 1, \dots, t\}$.

Выборку объема r из последовательности $\xi = (\xi_i)_{i \in I_n}$, $\xi_i \in \{\theta(2k_i - t), k_i = 0, 1, \dots, t\}$ можно рассматривать как сгруппированную выборку объема r из последовательности $\xi' =$

$(\xi'_i)_{i \in I_{nt}}$, $\xi'_i \in \{-\theta, \theta\}$. Где $\vec{X}'_1, \dots, \vec{X}'_r$ суть независимые, одинаково распределенные случайные вектора $\vec{X}'_i = (x'_{i,1}, x'_{i,2}, \dots, x'_{i,nt}) \in \{-\theta, \theta\}^{nt}$.

Тогда будем иметь

$$S_n(i) = \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \sum_{j=1}^{nt} x'_{i,j} = S_{nt}(i).$$

Откуда, если принять

$$S'_n(i) = \sum_{j=1}^n k_{i,j} \text{ то } S'_n(i) = S'_{nt}(i).$$

Отсюда

$$r_k = \sum_{i=1}^r \mathbf{I}(S'_n(i) = k) = \sum_{i=1}^r \mathbf{I}(S'_{nt}(i) = k\theta),$$

и определив для этого случая статистику (2) как

$$\hat{v}_m = \frac{\theta^m}{r} \sum_{k=0}^{nt} r_k \cdot \frac{B_{nt}(m, k)}{\sqrt{(nt)^m}}, \quad m = 1, \dots, nt.$$

По аналогии с предыдущим, получим следующий результат:

Теорема 3. Случайная величина

$$\frac{\sqrt{r}}{\theta^m} \cdot (\hat{v}_m - \ddot{v}_m) \Rightarrow N_{0, \sigma_m^2},$$

где

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=0}^{nt} \frac{B_{nt}^2(m, i)}{(nt)^m} \cdot \mathbf{P}_{nt}(i) \cdot (1 - \mathbf{P}_{nt}(i)) - 2 \sum_{0 \leq i < j} \frac{B_{nt}(m, i)}{\sqrt{(nt)^m}} \frac{B_{nt}(m, j)}{\sqrt{(nt)^m}} \mathbf{P}_{nt}(i) \cdot \mathbf{P}_{nt}(j)$$

или, что тоже самое,

$$\sigma_m^2 = \vec{\mathbf{B}}_{nt}(m) \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \vec{\mathbf{B}}'_{nt}(m).$$

Здесь $m = 1, \dots, nt$, а

$$\vec{\mathbf{B}}_{nt}(m) = \left(\frac{B_{nt}(m, 0)}{\sqrt{(nt)^m}}, \dots, \frac{B_{nt}(m, nt)}{\sqrt{(nt)^m}} \right).$$

Библиографический список

1. Чеботарев, С.В. О последовательностях случайных величин с усредненными связями / С.В. Чеботарев // Вестник АлтГПА: естественные и точные науки. – 2011. – Вып. 7. – С. 28–37.
2. Боровков, А.А. Теория вероятностей / А.А. Боровков. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 656 с.