Е.Н. Дронова

АНАЛИЗ ЗАДАНИЙ ПО АЛГЕБРЕ, НАЦЕЛЕННЫХ НА ПРОВЕРКУ УМЕНИЯ СТРОИТЬ И ЧИТАТЬ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ, В РАМКАХ ОСНОВНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

В статье проанализированы алгебраические задания экзаменационной работы по математике для учащихся 9-х классов, нацеленные на проверку умения строить и читать графики функций. Рассмотрены примеры решения типовых задач из данного раздела алгебры. Анализируются задачи различного уровня сложности (базового и высокого). Решение заданий сопровождается описанием основных приёмов решения задач из этой области математики.

Ключевые слова: математика, алгебра, функция, график функции, построение графика функции, чтение графика функции, основной государственный экзамен по математике.

E.N. Dronova

ANALYSIS OF TASKS IN ALGEBRA DESIGNED TO TEST THE ABILITY TO BUILD AND TO READ FUNCTIONS GRAPHICS AS PART OF THE BASIC STATE MATH EXAM

The article analyzes the algebraic setting examination on mathematics for students in grades 9, aimed at testing the ability to build and read graphs of functions. Examples of solving typical problems of this section of algebra are discovered. The tasks of different levels of difficulty (basic and high) are analyzed. The decision is accompanied by a description of the main methods of handling the tasks in the area of mathematics.

Key words: mathematics, algebra, function, function graph, the construction of the graph, reading the graph, the main state exam in mathematics.

Умение строить и читать графики функций является одним из основных умений, проверяемых по модулю «Алгебра» в рамках основного государственного экзамена по математике для учащихся 9 классов. Сущность его можно охарактеризовать следующим образом:

- умение определять координаты точки плоскости, строить точки с заданными координатами;
- умение определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, решать обратную задачу;
- умение определять свойства функции по ее графику (промежутки возрастания, убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения);
- умение строить графики изученных функций, описывать их свойства;
- умение решать элементарные задачи, связанные с числовыми последовательностями;
- умение распознавать арифметические и геометрические прогрессии; решать задачи с применением формулы общего члена и суммы нескольких первых членов прогрессий [1].

На проверку умения строить и читать графики функций, согласно структуре экзаменационной работы 2017 г., нацелены следующие задания:

- № 5 (часть 1, модуль «Алгебра», базовый уровень);
- № 6 (часть 1, модуль «Алгебра», базовый уровень);
- № 23 (часть 2, модуль «Алгебра», высокий уровень).

Анализируя элементы содержания, проверяемые данными заданиями экзаменационной работы, следует указать, что:

- задание № 5 нацелено на проверку усвоения темы «Функции»;
- задание № 6 нацелено на проверку усвоения темы «Числовые последовательности»;
- задание № 23 нацелено на проверку усвоения тем «Алгебраические выражения», «Уравнения и неравенства», «Числовые последовательности», «Функции», «Координаты на прямой и плоскости» [2].

В данной статье проанализируем типичные задания № 5 и № 23, т. к. именно они в первую очередь нацелены на проверку основных умений по построению и чтению графиков функций.

Рассмотрим примеры типичных заданий № 5.

ПРИМЕР 1 (аналог задания № 5)

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (рис. 1).

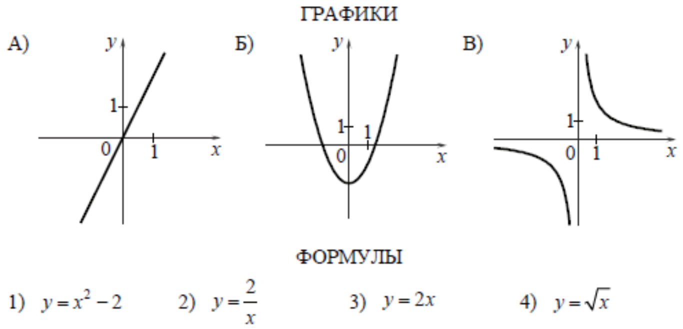


Рис. 1. Графики и формулы для установления соответствия (пример 1)

Ответ			

Комментарий к решению

В данном задании представлены графики функций различного вида, поэтому для его решения достаточно знание общих уравнений для задания прямой, параболы и гиперболы.

ПРИМЕР 2 (аналог задания № 5)

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (рис. 2).

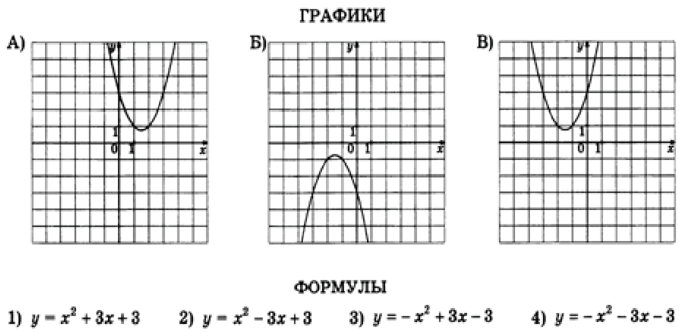


Рис. 2. Графики и формулы для установления соответствия (пример 2)

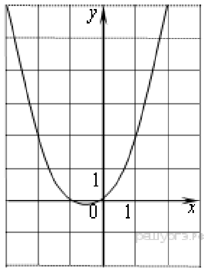
Ответ			

Комментарий к решению

В данном задании все представленные графики – это графики квадратичной функции, поэтому для его решения знания только общего уравнения, которым она задается, недостаточно. Здесь необходимо умение определять координаты точки на плоскости и умение вычислять значение функции по значению аргумента при аналитическом задании функции. Полезно также обратить внимание, что у двух данных парабол ветви направлены вверх, а у одной – вниз. Это позволит соотносить параболы с формулами более разумно (ясно, что параболы А и В задаются формулами 1 или 2, а парабола Б – формулами 3 или 4).

ПРИМЕР 3 (аналог задания № 5)

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке (рис. 3)?



1) $y=x^2-x$ 2) $y=-x^2-x$ 3) $y=x^2+x$ 4) $y=-x^2+x$

Рис. 3. График функции и формулы для установления соответствия

Ответ: 3

Комментарий к решению

Заметим, что ветви параболы направлены вверх, а значит, коэффициент $a>0$, поэтому представленному графику могут соответствовать только функции $y=x^2-x$ или $y=x^2+x$. Определить, какая из этих функций соответствует приведенной параболе можно двумя способами.

Способ 1. Найти на рисунке точку (точки) параболы, которая имеет целые координаты, и определить уравнение функции, которому они соответствуют. В данном случае это точки с координатами $(0;0)$, $(1;2)$, $(-2;2)$. Причем однозначно определить функцию позволяет точка $(1;2)$ или точка $(-2;2)$.

Способ 2. Выделим полный квадрат в обоих выражениях:

$$y=x^2-x=x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

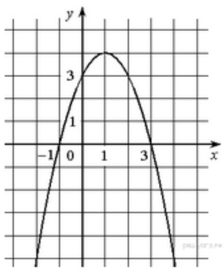
(сдвиг квадратичной функции $y=x^2$ по оси абсцисс вправо на $\frac{1}{2}$ и по оси ординат вниз на $\frac{1}{4}$),

$$y=x^2+x=x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

(сдвиг квадратичной функции $y=x^2$ по оси абсцисс влево на $\frac{1}{2}$ и по оси ординат вниз на $\frac{1}{4}$).

ПРИМЕР 4 (аналог задания № 5)

На рисунке изображен график квадратичной функции $y=f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции неверны (рис. 4)? Запишите их номера.



1) $f(-1)=f(3)$,
2) наибольшее значение функции равно 3,
3) $f(x)>0$ при $-1<x<3$.

Рис. 4. График функции и утверждения о ней для установления соответствия

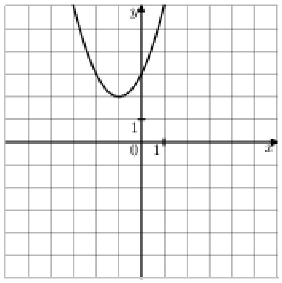
Ответ: 2

Комментарий к решению

Типовое задание на проверку умения определять свойства функции по её графику.

ПРИМЕР 5 (аналог задания № 5).

Найдите значение b по графику функции $y=ax^2+bx+c$, изображенному на рис. 5.



1) -2, 2) 1, 3) 2, 4) 3

Рис. 5. График функции

Ответ: 3) 2

Комментарий к решению

Отметим, что это задание не является типичным для экзаменационной работы ОГЭ, хотя и предлагается в качестве тренировочного. Опишем его решение.

Способ 1. Внимательное изучение данного графика позволяет заметить, что он получен из графика квадратичной функции $y = x^2$ путем параллельного его переноса по оси абсцисс на 1 единицу влево и по оси ординат на 2 единицы вверх. Поэтому, используя знания преобразования графиков функций, мы можем записать уравнение, которым задается данный график:

$$y = (x+1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 1 + 2 = x^2 + 2x + 3$$

Поэтому $b = 2$.

Способ 2. Составим уравнение, которым задается данная парабола, по точкам. Из рисунка видно, что парабола проходит через точки $(0{,}3)$, $(-1{,}2)$, $(-2{,}3)$.

Подставляя в общее уравнение квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ первую точку, находим, что $c = 3$. Поэтому данная парабола задается уравнением $y = ax^2 + bx + 3$, подставляя в него координаты второй и третьей точки, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a - b + 3 = 2, \\ 4a - 2b + 3 = 3. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим, что $b = 2$.

Далее проанализируем задание № 23. Это задание относится ко второй части экзаменационной работы, имеет высокий уровень сложности и нацелено на проверку умения выполнять преобразования алгебраических выражений и умения строить и читать графики функций.

ПРИМЕР 6 (аналог задания № 23)

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } |x| \le 1, \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } |x| > 1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку. Ответ: $c \in [-1{,}0]$.

Комментарий к решению

Опишем решение данной задачи по шагам.

1. Выполним преобразования алгебраических выражений: решим неравенства с модулем. В результате получим:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \in [-1{,}1], \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty). \end{cases}$$

2. Строим график кусочно-заданной функции на указанных промежутках. В результате получим рис. 6.

3. Выясним, как будет располагаться график функции, заданной уравнением $y = c$. Графиком этой функции будет являться прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0, c)$.

4. Исследуем количество общих точек построенного графика с прямой $y = c$, если $c \in (-\infty,+\infty)$. Получаем:

- при $c \in (-\infty,-1)$ общих точек нет;
- при $c \in [-1{,}0]$ единственная общая точка;
- при $c \in (0{,}1)$ три общих точки;
- при $c = 1$ две общие точки;
- при $c \in (1,+\infty)$ общих точек нет.

Итак, график построенный функции будет иметь единственную общую точку с прямой $y = c$ при $c \in [-1{,}0]$ (рис. 7).

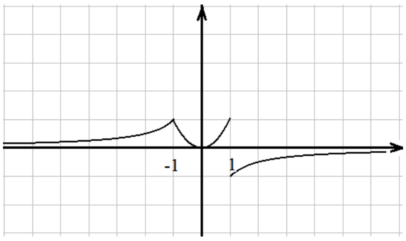


Рис. 6. График функции

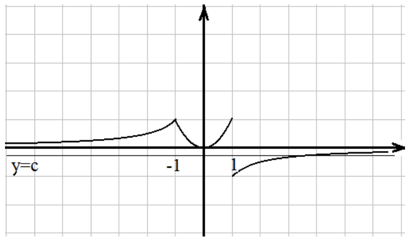


Рис. 7. Графическая иллюстрация решения задачи

ПРИМЕР 7 (аналог задания № 23)

При каком значении p прямая $y=-2x+p$ имеет с параболой $y=x^2+2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p.

Ответ: $p=-4$, $(-2{,}0)$.

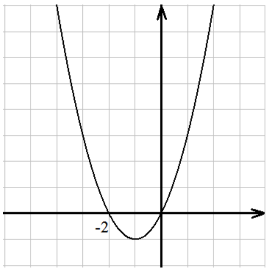


Рис. 8. График функции $y=x^2+2x$

Вспомним, что прямые $y=kx+b_1$ и $y=kx+b_2$, имеющие одинаковые угловые коэффициенты и разные свободные члены ($b_1 \neq b_2$), параллельны. Поэтому прямая $y=-2x+p$ параллельна построенной прямой $y=-2x$.

Построим прямую, параллельную прямой $y=-2x$ и имеющую с параболой только одну общую точку (рис. 10).

Комментарий к решению

Опишем решение данной задачи по шагам.

Способ 1

1. Построим график функции $y=x^2+2x$. В результате получим рис. 8.

2. Построим в этой же системе координат прямую $y=-2x$, $p=0$ (рис. 9).

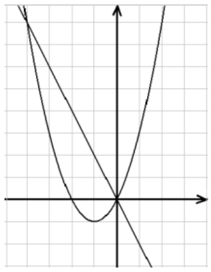


Рис. 9. Графики функций $y=x^2+2x$ и $y=-2x$

Найдем уравнение построенной прямой $y=-2x+p$. Заметим, что эта прямая проходит через точку с координатами (–4,4), подставив их в уравнение, получим: $4=8+p$, т. е. $p=-4$.

Получили, что искомая прямая задается уравнением $y=-2x-4$.

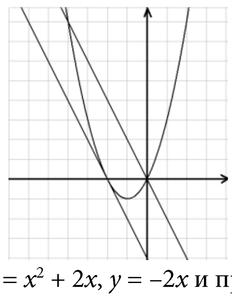


Рис. 10. Графики функций $y = x^2 + 2x$, $y = -2x$ и прямой, параллельной $y = -2x$ и имеющей с параболой только одну общую точку

3. Выполним проверку: проверим, что прямая $y=-2x-4$ имеет с параболой $y=x^2+2x$ только одну общую точку. Для этого найдем их общие точки, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y=-2x-4, \\ y=x^2+2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4, \\ -2x-4=x^2+2x, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-2x-4, \\ x^2+4x+4=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-4, \\ (x+2)^2=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=0, \\ x=-2. \end{cases}$$

Таким образом, прямая $y=-2x-4$ действительно имеет только одну общую точку с параболой $y=x^2+2x$. Эта точка имеет координаты $(-2{,}0)$.

Способ 2

1. По условию задачи прямая $y=-2x+p$ имеет с параболой $y=x^2+2x$ ровно одну общую точку. Поэтому уравнение $-2x+p=x^2+2x$ имеет ровно один корень. Решая это уравнение $x^2+4x-p=0$, находим $D=16+4p$; так как квадратное уравнение имеет один корень, то $D=16+4p=0$, отсюда $p=-4$.

2. Найдем общую точку прямой $y=-2x-4$ с параболой $y=x^2+2x$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=-2x-4, \\ y=x^2+2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=-2. \end{cases}$$

Общая точка прямой $y=-2x-4$ с параболой $y=x^2+2x$ имеет координаты $(-2{,}0)$.

3. Построим в одной системе координат прямую $y=-2x-4$ и параболу $y=x^2+2x$ (рис. 11).

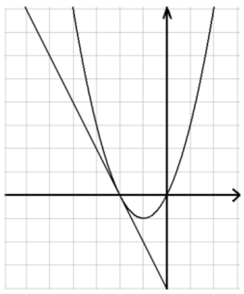


Рис. 11. Графики функций $y=x^2+2x$ и $y=-2x-4$

Рассмотренные примеры заданий не раскрывают всей полноты проверки умения строить и читать графики функций в рамках основного государственного экзамена по математике для учащихся 9-х классов. Тем не менее они иллюстрируют основные приемы решения задач этого раздела алгебры основной школы.

Библиографический список

1. Кодификатор требований к уровню подготовки обучающихся для проведения основного государственного экзамена по математике (2017 г.) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory.

2. Кодификатор элементов содержания для проведения основного государственного экзамена по математике (2017 г.) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory.